Beiträge

zur

Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der II. Sektion einer hohen Philosophischen Fakultät

der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität

vorgelegt am 8. November 1912

von

Max von Pidoll.

München 1912.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548303_0086

Beiträge

zur

Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der II. Sektion einer hohen Philosophischen Fakultät

der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität

vorgelegt am 8. November 1912

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

von

Max von Pidoll.

München 1912.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Dezember 1912.

Die folgende Arbeit wurde auf Veranlassung von Herrn Professor Pringsheim abgefaßt und schließt sich aufs engste an seine Arbeiten über Kettenbrüche an. Den ursprünglichen Ausgangspunkt bildete die im § 4 gegebene Übertragung der Resultate über die Konvergenz von eingliedrig limitär-periodischen Kettenbrüchen auf mehrgliedrig limitär-periodische. Der einfache Gedanke, einen solchen durch Kontraktion in mehrere eingliedrig limitär-periodische zu zerlegen, erwies sich dann auch für andere Fragen nützlich, insbesondere für eine einfache Herleitung der bekannten Kriterien für periodische Kettenbrüche, aber auch zur Erweiterung der einfachsten bekannten Konvergenz-Kriterien auf gewisse bisher noch nicht beachtete Fälle. Die weitere Ausführung dieses Gedankens bildet den Inhalt der vorliegenden Arbeit und ich hoffe, die Einheitlichkeit der Methode entschuldigt die Verschiedenheit der behandelten Gegenstände.

Im ersten Paragraphen wird das bekannte Pringsheimsche Hauptkriterium auf die beiden durch die einfachste Kontraktion entstehenden Kettenbrüche angewandt, wobei es das Wesentliche war, die Übereinstimmung der Werte der als konvergent erkannten Kettenbrüche zu beweisen. Dazu war eine in der Formulierung dieses Kriteriums nicht ausdrücklich enthaltene Relation nötig, und es schien deshalb nützlich, einen möglichst direkten und einfachen Beweis dieses Hauptkriteriums vorauszuschicken, der jedoch insofern nicht neu ist, als er schon Herrn Professor Pringsheim bekannt war und er mich auf dessen Möglichkeit aufmerksam gemacht hat. Da dieses Kriterium das allgemeinste zu sein scheint, das sich auf Grund

des Verhaltens der absoluten Beträge der Glieder eines Kettenbruches folgern läßt (wenn auch diese Tatsache nicht bewiesen ist und mir insbesondere zu beweisen nicht geglückt ist), so wird es vielleicht nicht unerwünscht sein, wenn an dieser Stelle ein direkter Beweis gegeben wird, der in erwünschter Kürze diesen alle Spezialfälle umfassenden Satz ohne Umwege liefert. Die auf dem oben angegebenen Wege gefundenen neuen Kriterien scheinen einen Schritt weiter zu bedeuten auf dem Wege solcher Kriterienaufstellung, die Bedingungen zwischen dem absoluten Betrage und der Charakteristik der Glieder eines Kettenbruches postulieren, und deshalb trotz ihrer geringen Tragweite Interesse beanspruchen, wenn sie auch wohl insofern keinen definitiven Charakter besitzen, als sie sich vielleicht auf Grund anderer Methoden als Spezialfälle allgemeinerer Kriterien herausstellen werden.

Im zweiten Paragraphen werden die bekannten Konvergenz- und Divergenzbedingungen für periodische Kettenbrüche auf einem neuen Wege hergeleitet, der einerseits eine Unterlage für die Betrachtungen des letzten Paragraphen gibt, andererseits gestattet, diese Bedingungen in einer Form auszusprechen, welche die Verhältnisse genauer zu beschreiben scheint. Es stellt sich dabei ein wesentlicher Unterschied zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz heraus und es wird so an diesem Beispiel erläutert, daß die Trennung dieser beiden Begriffe durchaus nützlich ist. Noch deutlicher tritt dies bei der Anwendung dieser Kriterien auf die Erweiterung eines bekannten Galoisschen Satzes hervor, für dessen Gültigkeit auf diese Art genauere und einfachere Bedingungen gefunden werden.

Der dritte Paragraph wendet sich zu den limitär-periodischen Kettenbrüchen, und zwar zunächst zu den eingliedrig limitär-periodischen. Herr Perron gibt in seinem demnächst erscheinenden Lehrbuch eine bemerkenswerte Erweiterung der bisherigen Resultate von van Vleck und Pringsheim auf den Fall, daß die Glieder des Kettenbruches zwar nicht gegen einen festen Wert konvergieren, sondern nur in einer gewissen Umgebung eines solchen liegen. Wie schön und einfach Herrn

Perrons Beweis auch ist, so scheint es vielleicht doch angebracht, zu zeigen, daß auch die Methode des Pringsheimschen Beweises im wesentlichen dasselbe zu leisten imstande ist. Es ist mir dabei nicht geglückt, den Satz in der eleganten Formulierung von Herrn Perron zu beweisen, jedoch hat die hier angewandte Methode den Vorteil, sich in Verbindung mit den Ausführungen über periodische Kettenbrüche unmittelbar auf mehrgliedrig limitär-periodische Kettenbrüche übertragen zu lassen.

Dies geschieht im vierten Paragraphen. Das Verfahren, die Übereinstimmung der Grenzwerte der kontrahierten Kettenbrüche zu beweisen, ist dabei dasselbe wie im ersten Paragraphen. Schließlich sei noch bemerkt, daß sich alle Sätze zunächst auf Kettenbrüche mit konstanten Gliedern beziehen. Es wurde jedoch auch der Fall berücksichtigt, daß die Glieder des Kettenbruches Funktionen gewisser Variablen sind und an den geeigneten Stellen darauf hingewiesen, wie sich aus den bewiesenen Sätzen solche über gleichmäßige Konvergenz derartiger Kettenbrüche ergeben.

Es sei mir erlaubt, Herrn Professor Pringsheim meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für die Anregung, seine Gedanken weiter auszuführen und für die tätige Förderung während der Abfassung dieses bescheidenen Versuches. Auch Herrn Professor Perron in Tübingen möchte ich dafür danken, daß er mir erlaubt hat, die Druckbogen seines an Resultaten reichen Lehrbuches vor dessen Veröffentlichung einzusehen, woraus mir manche Belehrung und Anregung wurde.

Es werden im Folgenden zitiert:

A. Pringsheim, Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. 28, 1898, mit „Pringsheim 1."

— Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche. Ebendort, Bd. 30, 1900, mit „Pringsheim 2."

— Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. Ebendort, Bd. 35, 1905, mit „Pringsheim 3."

— Über Konvergenz und funktionen-theoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche. Ebendort, Jahrgang 1910, mit „Pringsheim 4."

O. Perron, Lehrbuch der Theorie der Kettenbrüche (erscheint demnächst bei Teubner in Leipzig) mit „Perron, Lehrbuch."

Da die Bezeichnungen in der Lehre von den Kettenbrüchen nicht allgemein feststehen, gebe ich hier zunächst eine Zusammenstellung der von mir benützten Grundformeln, wobei ich mich an Pringsheim I p. 300 und 304 anschließe.

Die Näherungszähler A_ν und Nenner B_ν des Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ sind definiert durch die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} A_{\nu+1} &= b_{\nu+1} A_\nu + a_{\nu+1} A_{\nu-1} \\ B_{\nu-1} &= b_{\nu-1} B_\nu + b_{\nu+1} B_{\nu-1} \end{aligned}\right\} (\nu \geqq 1)$$

mit den Anfangswerten $A_0 = b_0,\ A_1 = b_0 b_1 + a_1$
mit den Anfangswerten $B_0 = 1,\ B_1 = b_1$.

Der Wert des Näherungsbruches selbst ist dann, falls $|B_n| > 0$:

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n.$$

Definiert man ferner $A_{m,n}$ und $B_{m,n}$ durch die Formeln

$$A_{m,\nu+1} = b_{\nu+1} A_{m,\nu} + a_{\nu+1} A_{m,\nu-1} \ (\nu \geqq m+1)$$

mit den Anfangswerten $A_{m,m} = 0,\ A_{m,m+1} = a_{m+\nu}$

$$B_{m,\nu+1} = b_{\nu+1} B_{m,\nu} + a_{\nu+1} B_{m,\nu-1} \ (\nu \geqq m+1)$$

mit den Anfangswerten $B_{m,m} = 1,\ B_{m\,m+1} = b_{m+1}$,

so wird, falls $|B_{m,n}| > 0$

$$\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n.$$

Ist insbesondere $b_0 = 0$, so ist $A_{0,n} = A_n,\ B_{0,n} = B_n$.

Es gelten dann die folgenden Formeln, die man leicht durch vollständige Induktion beweist:

$$\text{(a)} \qquad \left.\begin{aligned} A_n &= B_{m,n} A_m + A_{m,n} A_{m-1} \\ B_n &= B_{m,n} B_m + A_{m,n} B_{m-1} \end{aligned}\right\} (n \geqq m \geqq 1)$$

oder allgemeiner:

$$(a') \quad \left.\begin{aligned} A_{r,n} &= B_{m,n} A_{r,m} + A_{m,n} A_{r,m-1} \\ B_{r,n} &= B_{m,n} B_{r,m} + A_{m,n} B_{r,m-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geqq m \geqq r+1).$$

Aus diesen folgt dann

$$(b) \quad \begin{aligned} A_n B_m - A_m B_n &= A_{m,n} (B_m A_{m-1} - A_m B_{m-1}) \\ &= (-1)^m a_1 a_2 \ldots a_m A_{m,n} \quad (n \geqq m), \end{aligned}$$

und wiederum allgemeiner:

$$(b') \quad A_{r,n} B_{r,m} - A_{r,m} B_{r,n} = (-1)^{m-r} a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_m A_{m,n}.$$

Aus (a') ergibt sich ferner für $m = r+1$

$$(c) \quad \left.\begin{aligned} A_{r,n} &= a_{r+1} B_{r+1,n} \\ B_{r,n} &= b_{r+1} B_{r+1,n} + A_{r+1,n}. \end{aligned}\right.$$

Schließlich:

$$(d) \quad \left.\begin{aligned} A_{r,m} \cdot A_n &= A_{r,n} A_m + (-1)^{m-r+1} a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_m A_{m,n} A_m \\ A_{r,m} \cdot B_n &= A_{r,n} B_m + (-1)^{m-r+1} a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_m A_{m,n} B_m \\ &\qquad (n \geqq m \geqq r+1). \end{aligned}\right.$$

Es sei auch noch erwähnt, daß, falls A'_ν, B'_ν die Näherungszähler und Nenner des äquivalenten Kettenbruches

$$b_0 + \frac{c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2|}{|c_2 b_2} + \cdots + \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu|}{|c_\nu b_\nu}$$

bezeichnen, die Formeln gelten:

$$(e) \quad \left.\begin{aligned} A'_\nu &= c_1 c_2 \ldots c_\nu A_\nu \\ B'_\nu &= c_1 c_2 \ldots c_\nu B_\nu. \end{aligned}\right.$$

§ 1. Einige elementare Konvergenzkriterien.

Satz 1. „Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ (wo die a_ν beliebig komplex) konvergiert (unbedingt), falls sich für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ Zahlen $p_\nu > 1$ so bestimmen lassen, daß für $\nu \geqq 2$:

$$|a_\nu| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu} \tag{1}$$

(Pringsheim 3).“

In der Tat folgt aus der Rekursionsformel für $\nu \geqq 2$

$$B_\nu = B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}$$

nach (1)

$$|B_\nu| \geqq |B_{\nu-1}| - \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu} |B_{\nu-2}|,$$

oder

$$|B_\nu| - \frac{1}{p_\nu} |B_{\nu-1}| \geqq \frac{p_{\nu-1}}{p_\nu} \left(|B_{\nu-1}| - \frac{1}{p_{\nu-1}} |B_{\nu-2}| \right). \tag{2}$$

Ersetzt man hierin ν durch $\nu - 1$, $\nu - 2$, ... 3, 2, multipliziert die entstehenden Ungleichungen und beachtet, daß wegen $B_0 = B_1 = 1$

$$|B_1| - \frac{1}{p_1} |B_0| = \frac{p_1 - 1}{p_1},$$

so ergibt sich:

$$|B_\nu| - \frac{1}{p_\nu} |B_{\nu-1}| \geqq \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_\nu - 1)}{p_1 p_2 \cdots p_\nu} \quad (\nu > 1). \tag{3}$$

Addiert man hierzu die entsprechenden Ungleichungen, in denen ν durch $\nu - 1$, $\nu - 2$, ... 3, 2, 1 ersetzt ist, nachdem man sie der Reihe nach mit

$$\frac{1}{p_\nu}, \frac{1}{p_{\nu-1}p_\nu}, \cdots \frac{1}{p_2 p_3 \cdots p_\nu}$$

multipliziert hat, so erhält man schließlich

$$|B_\nu| \geqq \frac{M_\nu}{p_1 p_2 \cdots p_\nu} \quad (\nu \geqq 1), \tag{4}$$

wobei

$$M_\nu = 1 + \sum_1^\nu{}^\lambda (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_\lambda - 1) \tag{5}$$

gesetzt ist.

Nach dieser Definition sind die M_ν positive mit ν monoton zunehmende Größen. Nach (1) und (4) ist daher

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_2 a_3 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}\right| &< \frac{(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_\nu-1)}{p_1 p_2 p_2 p_3 \ldots p_{\nu-2} p_{\nu-1} p_{\nu-1} p_\nu} \cdot \frac{p_1 p_2 \ldots p_{\nu-1} \cdot p_1 p_2 \ldots p_{\nu-1} p_\nu}{M_{\nu-1} M_\nu} \\ &= \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1} M_\nu}, \end{aligned} \tag{6}$$

also kleiner als das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe mit positiven Gliedern, so daß die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} &= \frac{A_1}{B_1} + \sum_2^\infty{}^\nu \left(\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right) \\ &= a_1 \left(1 + \sum_2^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \frac{a_2 a_3 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

absolut konvergiert, womit auch die Konvergenz des Kettenbruches bewiesen ist. Daß diese dann eine unbedingte ist, folgt aus der Form der Bedingungen (1).

Gleichzeitig ergibt sich eine obere Schranke für den absoluten Betrag des Kettenbruches. Aus Gleichung (6) und (7) folgt nämlich:

$$\left|\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty{}^\nu\right| < |a_1| \left\{1 + \frac{p_1}{p_1 - 1} \sum_2^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{M_{\nu-1}} - \frac{1}{M_\nu}\right)\right\} \leq |a_1| \left(1 + \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{1}{M_1}\right),$$

also:

$$\left|\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty{}^\nu\right| \leq |a_1| \cdot \frac{p_1}{p_1 - 1}. \tag{8}$$

In dieser Beziehung kann aber das Gleichheitszeichen offenbar nur dann stehen, wenn für alle $\nu = 2, 3 \ldots$:

$$a_\nu = -\frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu}$$

und gleichzeitig $\lim_{\nu=\infty} M_\nu = \infty$ ist.

Auf Grund dieser Bemerkung ist in den Bedingungen von Satz 1 unter gewissen Einschränkungen auch noch der Wert $p_1 = 1$ zulässig. Denn wenn auch $p_1 = 1$ ist, so konvergiert nach Satz 1 jedenfalls der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty{}_\nu$ und nach (8) gilt für seinen Wert:

$$\left|\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty{}_\nu\right| \leqq |a_2| \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \leqq \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} = 1. \tag{9}$$

Da nun

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty{}_\nu = \frac{a_1}{1 + \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty{}_\nu}, \tag{10}$$

so konvergiert der Kettenbruch jedenfalls, wenn $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty \neq 1$ ist. Dies ist sicher der Fall, wenn in (9) das Kleinerzeichen gilt. Damit aber in (9) das Gleichheitszeichen gelten könne, muß nach dem Obigen jedenfalls für $\nu \geqq 3$

$$a_\nu = -\frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu} \text{ und } \sum_3^\infty{}_\lambda (p_3 - 1)\,(p_\lambda - 1) = \infty$$

sein. In diesem Falle findet man jedoch mit Benutzung einer bekannten Eulerschen Formel (Perron, Lehrbuch p. 210) oder durch Ausrechnen (nach Art der Gleichungen (2) und (3)):

$$\begin{aligned}\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty{}_\nu &= a_2 \cdot \left[\frac{1}{1}, \frac{-\frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu}}{1}\right]_3^\infty{}_\nu = a_2 \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdot \left[\frac{p_\nu - 1}{p_\nu}\right]_2^\infty \\ &= a_2 \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1}\left(1 - \frac{1}{1 + \sum_2^\infty{}_\lambda (p_2 - 1)\,(p_3 - 1) \ldots (p_\lambda - 1)}\right) \\ &= a_2 \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1},\end{aligned} \tag{11}$$

und damit hierin die rechte Seite den Wert -1 habe, muß auch $a_2 = -\dfrac{p_2 - 1}{p_2}$ sein. In jedem anderen Fall konvergiert also der ursprüngliche Kettenbruch, während er in diesem Fall außerwesentlich divergiert, was man auch wieder mit Hilfe der Eulerschen Transformationsformel verifiziert, da, falls für $\nu \geq 2$

$$a_\nu = -\frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu}, \qquad p_1 = 1$$

ist, auch

$$(12) \quad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = a_1 \left(1 + \sum_2^\infty {}^\lambda (p_2 - 1)(p_3 - 1) \ldots (p_\lambda - 1)\right)$$

ist.

Zusammengefaßt gilt also der

Zusatz zu Satz 1: „In den Bedingungen des Satzes 1 ist auch noch der Wert $p_1 = 1$ zulässig, außer wenn gleichzeitig

$$(13)\ a_\nu = -\frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu} \text{ für } \nu > 2, \sum_2^\infty {}^\lambda (p_2 - 1)(p_3 - 1) \ldots (p_\lambda - 1) = \infty.“$$

Da man jeden Kettenbruch der Form $\left[\dfrac{a_\nu}{b_\nu}\right]$, in dem alle $|b_\nu| > 0$ sind, auf die Form $\left[\dfrac{a_1}{\dfrac{b_1}{1}}, \dfrac{a_\nu}{\dfrac{b_{\nu-1} b_\nu}{1}}\right]$ bringen kann, so gelten für diesen Kettenbruch genau Satz 1 mit seinem Zusatz, wenn man nur in dessen Wortlaut a_ν durch $\dfrac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}$ ersetzt.

Wählt man dann $p_\nu = |b_\nu|$, so erhält man genau den ursprünglichen Pringsheimschen Satz ($\left[\dfrac{a_\nu}{b_\nu}\right]$ konvergent, wenn $|b_1| > 1$, $b_\nu > a_\nu' + 1$ $(\nu > 2)$) (Pringsheim 1), mit den entsprechenden Nebenbedingungen.

Im Wesentlichen nur eine andere Formulierung von Satz 1 und mit ihm logisch äquivalent und genau auf dieselbe Art beweisbar, jedoch für das Folgende nützlich ist der

Satz 2: „Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty{}_\nu$ konvergiert unbedingt, wenn sich für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Paare positiver (von Null verschiedener) Zahlen k_ν, k'_ν so bestimmen lassen, daß:

$$(14) \qquad \begin{cases} |a_\nu| \leqq k_{\nu-1} \cdot k'_\nu & \text{für } \nu \geqq 2, \\ |b_\nu| \geqq k_\nu + k'_\nu & \text{für } \nu \geqq 1.\text{“} \end{cases}$$

In der Tat ergibt sich aus (14)

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{k_{\nu-1} k'_\nu}{(k_{\nu-1} + k'_{\nu-1})(k_\nu + k'_\nu)} = \frac{\frac{k'_\nu}{k_\nu}}{\left(1 + \frac{k'_{\nu-1}}{k_{\nu-1}}\right)\left(1 + \frac{k'_\nu}{k_\nu}\right)},$$

so daß die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind, wenn man für $\nu \geqq 1$

$$p_\nu = 1 + \frac{k'_\nu}{k_\nu}$$

nimmt.

Für den absoluten Betrag des ν^{ten} Näherungsnenners des Kettenbruches folgt dann aus der Beziehung (4) und unter Beachtung der Hilfsformeln (e)

$$(15) \qquad |B_\nu| \geqq k_1 k_2 \ldots k_\nu \cdot K_\nu,$$

wobei

$$(16) \qquad K_\nu = 1 + \frac{k'_1}{k_1} + \frac{k'_1 k'_2}{k_1 k_2} + \cdots + \frac{k'_1 k'_2 \ldots k'_\nu}{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$$

gesetzt ist und

$$(17) \qquad K_\nu > K_{\nu-1} > 1.$$

Der Kettenbruch bleibt auch für $k'_1 = 0$ konvergent, wenn nur die geeignet transformierten Ausnahmebedingungen des Zusatzes nicht erfüllt sind.

Aus dem Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty{}_\nu$ kann man durch Kontraktion zwei andere herleiten, deren Näherungsbrüche gerade die des ursprünglichen, das eine Mal mit geradem, das andere Mal mit ungeradem Index sind:

$$(18)\quad \frac{a_1|}{|1+a_2} - \frac{a_2\,a_3|}{|1+a_3+a_4} - \frac{a_4\,a_5|}{|1+a_5+a_6} - \cdots - \frac{1+a_{2\nu-1}+a_{2\nu}}{a_{2\nu-2}\,a_{2\nu-1}} - \cdots = \left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty,$$

$$(19)\quad a_1 - \frac{a_1\,a_2|}{|1+a_2+a_3} - \frac{a_3\,a_4|}{|1+a_4+a_5} - \cdots - \frac{|1+a_{2\nu}+a_{2\nu+1}}{a_{2\nu-1}\,a_{2\nu}} - \cdots = b'_0 + \left[\frac{a''_\nu}{b''_\nu}\right]_1^\infty,$$

wobei gesetzt ist:

$$(20)\quad \begin{cases} a'_1 = a_1, & a'_\nu = -a_{2\nu-2}\,a_{2\nu-1} \\ b'_1 = 1+a_2, & b'_\nu = 1+a_{2\nu-1}+a_{2\nu} \end{cases} (\nu \geqq 2)$$
$$\begin{cases} a''_\nu = -a_{2\nu-1}\,a_{2\nu} \quad (\nu \geqq 1) \\ b''_0 = a_1, & b''_\nu = 1+a_{2\nu}+a_{2\nu+1} \quad (\nu \geqq 1) \end{cases}$$

Bezeichnen dann A'_ν, B'_ν; A''_ν, B''_ν die Näherungszähler- und -Nenner von (18) und (19), so ist

$$(21)\quad \begin{cases} A'_\nu = A_{2\nu}, & B'_\nu = B_{2\nu}, \\ A''_\nu = A_{2\nu+1}, & B''_\nu = B_{2\nu+1}. \end{cases}$$

Konvergiert der ursprüngliche Kettenbruch, so konvergieren die beiden kontrahierten a fortiori, während aus der bloßen Konvergenz von (18) und (19) offenbar nicht auf die des ursprünglichen geschlossen werden kann, wozu vielmehr noch die Übereinstimmung der Grenzwerte der beiden Kettenbrüche erforderlich ist. Tatsächlich ist es jedoch möglich, die beiden Kettenbrüche auf Grund der obigen Sätze solchen Bedingungen zu unterwerfen, daß aus ihnen auch die Konvergenz des ursprünglichen Kettenbruches folgt.

Zunächst ist es klar, daß es nicht etwa für die Konvergenz von $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ausreicht, die beiden kontrahierten Kettenbrüche (18) und (19) den Bedingungen zu unterwerfen:

$$\left|\frac{a'_\nu}{b'_{\nu-1}\,b'_\nu}\right| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\,p_\nu}, \qquad \left|\frac{a''_\nu}{b''_{\nu-1}\,b''_\nu}\right| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\,p_\nu}.$$

In der Tat würde daraus das unsinnige Resultat folgen, daß irgend zwei etwa periodische Kettenbrüche $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]$ und $\left[\frac{d_\nu}{1}\right]$, für die $|c_\nu| = |c| \leqq \frac{1}{4}$, $|d_\nu| = |d| \leqq \frac{1}{4}$, denselben Wert haben müßten, da sie aus einem Kettenbruch durch Kontraktion entstanden gedacht werden können. In den fraglichen Bedingungen muß also jedenfalls die besondere Form der Teilzähler und Nenner der beiden kontrahierten Kettenbrüche zum Ausdruck kommen.

Auf Grund von Satz 2 ergibt sich

Satz 3: „Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn für $\nu \geqq 1$ die Paare positiver von Null verschiedener Zahlen k_ν, k'_ν sich so bestimmen lassen, daß:

$$(22)\quad \left\{\begin{matrix}|a'_\nu| \\ |a''_\nu|\end{matrix}\right\} \leqq k_{\nu-1} k'_\nu \ (\nu \geqq 2), \qquad \left\{\begin{matrix}|b'_\nu| \\ |b''_\nu|\end{matrix}\right\} \geqq k_\nu + k'_\nu \ (\nu \geqq 1),$$

wobei a'_ν, b'_ν, a''_ν, b''_ν durch die Gleichungen (20) definiert sind."

Die Konvergenz der beiden Kettenbrüche (18) und (19) steht nach Satz 2 bereits fest. Es stimmen aber auch ihre Grenzwerte überein. Auf Grund der Beziehungen (15), (21), (22) ergibt sich nämlich:

$$(23)\quad \left|\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}\right| = \left|\frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu}{B_{2\nu-1} B_{2\nu}}\right| = \left|\frac{a_1 a_2 \ldots a_{2\nu}}{B''_{\nu-1} B'_\nu}\right|$$

$$\leqq |a_1| \frac{k_1 k'_2 k_2 k'_3 \ldots k_{\nu-1} k'_\nu}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu-1} k_1 k_2 \ldots k_\nu K_{\nu-1} K_\nu} = |a_1| \frac{1}{k'_1} \frac{k'_1 k'_2 \ldots k'_\nu}{k_1 k_2 \ldots k_\nu \; K_{\nu-1} K_\nu}$$

$$= \frac{|a_1|}{k'_1} \frac{K_\nu - K_{\nu-1}}{K_{\nu-1} \cdot K_\nu}.$$

Das letzte Glied konvergiert aber als allgemeines Glied einer konvergenten Reihe gegen Null, womit die Gleichheit der beiden Grenzwerte bewiesen ist.

Ein ähnlicher, aber mit dem Vorhergehenden nicht äquivalenter Satz ist folgender

Satz 4: „Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn sich die Zahlen $p_\nu > 1$ für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ so bestimmen lassen, daß für $\nu > 2$

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \left|\frac{a_{2\nu-2}}{b'_{\nu-1}}\right| \\ \\ \left|\frac{a_{2\nu-1}}{b'_\nu}\right| \\ \\ \left|\frac{a_{2\nu-1}}{b'_{\nu-1}}\right| \\ \\ \left|\frac{a_{2\nu}}{b''_\nu}\right| \end{array} \right\} \leqq \sqrt{\frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu}}\text{“}.$$

In der Tat folgt hieraus durch Multiplikation der beiden ersten und der beiden letzten Ungleichungen die Konvergenz der beiden Kettenbrüche (18) und (19) auf Grund von Satz 1. Schafft man dann in beiden Kettenbrüchen die Teilnenner hinauf, beachtet die Hilfsformsl (e) und die Relation (4), so findet man:

$$(25) \qquad \left|\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}\right| = \left|\frac{a_1 a_2 \ldots a_{2\nu}}{B_{2\nu-1} B_{2\nu}}\right| <$$

$$< |a_1| \left|\frac{a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots a_{2\nu-2}}{b'_1 b''_1 b'_2 b''_2 b'_{\nu-2}} \frac{a_{2\nu-1} a_{2\nu}}{b'_{\nu-1} b'_1}\right| \cdot \frac{p_1 p_2 \ldots p_{\nu-1} p_1 p_2 \ldots p_{\nu-1} p_\nu}{M_{\nu-1} M_1}$$

$$\leqq |a_1| \frac{p_1 (p_2 - 1)(p_3 - 1) \ldots (p_\nu - 1)}{M_{\nu-1} M_\nu}$$

$$= |a_1| \cdot \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{M_1 - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1} M_\nu},$$

woraus wieder die Übereinstimmung der beiden Grenzwerte folgt.

In diesem Satze könnte man einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern noch solche Freiheiten gestatten, die die Konvergenz der einzelnen Kettenbrüche nicht stören, da dadurch der Beweis für ihre Übereinstimmung nicht beeinträchtigt wird. Auch sind wohl durch diese beiden Sätze die Kriterien nicht erschöpft, bei denen sich die Konvergenz der einzelnen Kettenbrüche auf Grund von Satz 1 ergibt, während ihre Überein-

stimmung auf einem anderen Wege bewiesen wird. Es ist auch klar, daß man das angewandte Verfahren wiederholen könnte und so zu weitertragenden, aber auch um so komplizierteren Kriterien käme.

Die Gesamtheit der in Satz 3 und 4 enthaltenen Spezialfälle läßt sich nicht überblicken, schon deshalb nicht, weil in jeder Bedingung mehrere Teilzähler des Kettenbruches vorkommen. Ich hebe die folgenden Spezialfälle hervor, weil sie sich ohne Mühe ergeben und eine einfache, ganz bemerkenswerte Form haben.

Wählt man in dem letzten Satze $p_\nu = 2$, so ergibt sich

Satz 5: „Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, falls

$$(26) \qquad \begin{cases} 2\,|a_\nu| \leqq |1 + a_2| \\ 2\,|a_\nu| \begin{cases} \leqq |1 + a_{\nu-1} + a_\nu| \\ \leqq |1 + a_\nu + a_{\nu+1}| \end{cases} \end{cases} \quad \text{für } \nu > 3\text{“}.$$

Diese Bedingungen sind speziell erfüllt, wenn

$$a_\nu = \alpha_\nu + i\,\beta_\nu,\ \alpha_\nu \geqq 0, \text{ und } |a_\nu| \leqq \tfrac{1}{4} \text{ ist.}$$

Ebenso gilt

Satz 6: „Der Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_\nu + i\,\beta_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, falls die Bedingungen

$$(27) \qquad \begin{cases} \alpha_\nu \geqq 0\ (\nu \geqq 2); \qquad |\beta_\nu| \leqq G, \qquad |a_2| < \tfrac{1}{2}, \\ |\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}| \leqq 1 - \vartheta;\ |\beta_\nu - \beta_{\nu+1}| < \dfrac{\vartheta}{4\,G} \quad \begin{pmatrix} \nu \geqq 3 \\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

erfüllt sind.“

In der Tat läßt sich die zweite Bedingung (26) so schreiben:

$$(1 + \alpha_{\nu-1} + 3\,\alpha_\nu)(1 + \alpha_{\nu-1} - \alpha_\nu) + (\beta_{\nu-1} - \beta_\nu)(\beta_{\nu-1} + 3\,\beta_\nu) > 0,$$

und die linke Seite wird nach (27) größer oder gleich

$$1 \cdot (1 - 1 + \vartheta) - 4\,G \cdot \frac{\vartheta}{4\,G} = 0.$$

Diese Bedingungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn $a_\nu \geqq 0$, $|a_{\nu+1} - a_\nu| \leqq 1$, $\beta_\nu = \beta_{\nu+1} = \text{const.}$ ist.

Schließlich sei noch der Satz angeführt

Satz 7: „Der Kettenbruch $\left[\frac{e^{\varphi_\nu i}}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, falls:

$$-\frac{\pi}{3} \leqq \varphi_\nu \leqq +\frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2. \tag{28}$$

In der Tat ist in diesem Fall $\cos \varphi_\nu \geqq \frac{1}{2}$, also

$$|1 + a_2| \geqq 1 + \tfrac{1}{2}$$
$$|1 + a_{\nu-1} + a_\nu| \geqq 2 \quad (\nu \geqq 3);$$

es sind also die Bedingungen von Satz 3 erfüllt, wenn man dort $k_1' < \frac{1}{2}$, $k_1 = 1$, $k_\nu = k_\nu' = 1$ für $\nu \geqq 2$ wählt.

In den drei letzten Sätzen könnte man dem Teilzähler auf Grund der früheren Sätze noch einen größeren Spielraum lassen. Überhaupt ist nicht versucht worden, selbst für diese Fälle aus den allgemeinen Sätzen 3 und 4 das Äußerste herauszuholen.

§ 2. Konvergenz und Divergenz periodischer Kettenbrüche.

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (bei dem einzig vorausgesetzt ist, daß für jedes $\nu \mid a_\nu \mid > 0$) heißt p-gliedrig rein periodisch, wenn für jedes $r \geqq 0$

$$a_{r+p} = a_r, \quad b_{r+p} = b_r \tag{1}$$

und p die kleinste Zahl ist für die dieses stattfindet. Daraus folgt unmittelbar, daß auch für alle $n \geq r \geqq 0$

$$A_{r+p,\,n+p} = A_{r,n}, \; B_{r+p,\,n+p} = B_{r,n}. \tag{2}$$

Für die Konvergenz des Kettenbruches ist offenbar notwendig und hinreichend, daß von den p Folgen von Näherungsbrüchen:

$$\frac{A_{\lambda p+m}}{B_{\lambda p+m}} \; (m = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \tag{3}$$

jede einzelne bei $\lim \lambda = \infty$ konvergiert und daß die p Grenzwerte übereinstimmen. Die Frage nach der Konvergenz der einzelnen Folgen erledigt sich einfach, da zwischen den Zählern (und Nennern) der aufeinander folgenden Brüche einer solchen Folge Rekursionsformeln bestehen, die sich leicht auflösen lassen.

Bevor wir diese herleiten, schicken wir folgende Bemerkung voraus: durch Anwendung der Formeln (c) ergibt sich:

$$A_{r,\,p+r-1} + B_{r,\,p+r} = a_{r+1} B_{r+1,\,p+r-1} + b_{r+1} B_{r+1,\,p+r} + A_{r+1,\,p+r},$$

also nach (1) infolge der Rekursionsformel

$$A_{r,\,p+r-1} + B_{r,\,p+r} = A_{r+1,\,p+r} + B_{r+1,\,p+r+1}.$$

Es hat also der Ausdruck:

$$S \equiv A_{r,p+r-1} + B_{r,p+r} \tag{4}$$

für jedes $r > 0$ denselben Wert. Dasselbe ist wegen der Periodizität unmittelbar einleuchtend für den Ausdruck

$$\begin{aligned} P &= (-1)^p a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_{r+p} \\ &= A_{r,p+r-1} B_{r,p+r} - A_{r,p+r} B_{r,p+r-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Um nun die gesuchte Rekursionsformel herzuleiten, bemerkt man, daß nach (a')

$$A_{r,2p+r} = B_{p+r,2p+r} A_{r,p+r} + A_{p+r,2p+r} A_{r,p+r-1},$$

also nach (2):

$$\begin{aligned} A_{r,2p+r} &= B_{r,p+r} A_{r,p+r} + A_{r,p+r} A_{r.p+r-1} \\ A_{r,2p+r} &= S \cdot A_{r,p+r}, \end{aligned} \tag{6}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} B_{r,2p+r} &= B_{p+r,2p+r} B_{r,p+r} + A_{p+r,2p+r} B_{r,p+r-1} \\ &= B_{r,p+r} B_{r,p+r} + A_{r,p+r} B_{r,p+r-1} \\ &= (B_{r,p+r} + A_{r,p+r-1}) B_{r,p+r} + A_{r,p+r} B_{r,p+r-1} - A_{r,p+r-1} B_{r,p+r}, \end{aligned}$$

also

$$B_{r,2p+r} = S B_{r,p+r} - P. \tag{7}$$

Setzt man (6) und (7) in die aus (a) folgende Gleichung ein:

$$A_{2p+r} = B_{r,2p+r} A_r + A_{r,2p+r} A_{r-1}.$$

so wird diese

$$A_{2p+r} = (S B_{r,p+r} - P) A_r + S A_{r,p+r} A_{r-1}.$$

Subtrahiert man hiervon die mit S multiplizierte Gleichung

$$A_{p+r} = B_{r,p+r} A_r + A_{r,p+r} A_{r-1},$$

so ergibt sich die Beziehung

$$A_{2p+r} = S \cdot A_{p+r} - P A_r, \tag{8}$$

und durch genau die gleiche Rechnung

$$B_{2p+r} = S B_{p+r} - P B_r. \tag{8a}$$

Ersetzt man hierin r durch $(\lambda-1)p+m$, wo m einen der Werte $0, 1, 2 \ldots (p-1)$ hat, so erhält man die Rekursionsformeln

$$(9)\quad \begin{cases} A_{(\lambda+1)p+m} = SA_{\lambda p+m} - PA_{(\lambda-1)p+m}, & m = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \\ B_{(\lambda+1)p+m} = SB_{\lambda p+m} - PB_{(\lambda-1)p+m}, & \lambda = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

bei denen als Anfangswerte A_m, A_{p+m} bzw. B_m, B_{p+m} zu nehmen sind.

Die Formeln (9) gelten ganz allgemein, sie vereinfachen sich jedoch beträchtlich für die Werte von m, für welche $A_{m,p+m} = 0$ (also sicher $|B_{m,p+m}| > 0$) ist. In diesem Falle wird nämlich nach (a)

$$A_{(\lambda+1)p+m} = B_{m,p+m} A_{\lambda p+m}$$
$$B_{(\lambda+1)p+m} = B_{m,p+m} B_{\lambda p+m},$$

also durch wiederholte Anwendung:

$$(9')\quad \begin{cases} A_{(\lambda+1)p+m} = B_{m,p+m}^{\lambda+1} A_m \\ B_{(\lambda+1)p+m} = B_{m,p+m}^{\lambda+1} B_m \end{cases} \quad (\text{wenn } A_{m,p+m} = 0),$$

so daß für diesen Wert von m die Rekursionsformel schon aufgelöst ist und für den Grenzwert der zu m gehörigen Folge sich der Wert ergibt:

$$(10)\qquad K_m = \frac{A_m}{B_m},$$

die durch m charakterisierte Folge also konvergiert, falls $|B_m| > 0$ ist. In diesem Falle wollen wir sagen, daß sowohl die Folge wie ihr Grenzwert die „spezielle“ Form habe.

Im allgemeinen Fall haben wir die gemeinsame Rekursionsformel

$$(11)\qquad D_{\nu+1} - SD_\nu + PD_{\nu-1} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

aufzulösen. Dazu betrachten wir die quadratische Gleichung

$$(12)\qquad y^2 - Sy + P = 0$$

die wegen $|P| > 0$ zwei von Null verschiedene Wurzeln z

und z' hat. Sind deren absolute Beträge verschieden, so sei $|z'| < |z|$. Es ist dann

$$z + z' = S, \qquad z z' = P, \tag{13}$$

und die Rekursionsformel (11) nimmt dann die Gestalt an

$$D_{\nu+1} - (z + z') D_\nu + z z' D_{\nu-1} = 0$$

oder

$$D_{\nu+1} - z D_\nu = z' (D_\nu - z D_{\nu-1}),$$

woraus sich durch wiederholte Anwendung

$$D_{\nu+1} - z D_\nu = z'^\nu (D_1 - z D_0)$$

ergibt. Ersetzt man hierin ν sukzesive durch

$$\lambda - 1,\ \lambda - 2,\ \ldots\ 3,\ 2,$$

fügt die identische Gleichung $D_1 - z D_0 = D_1 - z D_0$ hinzu, multipliziert die betreffenden Gleichungen mit

$$1,\ z,\ z^2,\ \ldots\ z^{\lambda-1}$$

und addiert sie, so folgt:

$$\begin{aligned} D_\lambda - z^\lambda D_0 = (&z'^{\lambda-1} + z'^{\lambda-2} z + \cdots + z' z^{\lambda-2} \\ &+ z^{\lambda-1}) (D_1 - z D_0). \end{aligned} \tag{14}$$

Im Falle die Determinante der quadratischen Gleichung verschwindet, also

$$D \equiv S^2 - 4P = 0$$

oder $z = z'$, gibt Gleichung (14)

$$D_\lambda = z'^\lambda D_0 + \lambda z'^{\lambda-1} (D_1 - z' D_0) = \lambda z'^{\lambda-1} \left(D_1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda} z' D_0 \right).$$

Setzt man hierin als Anfangswerte einmal

$$D_0 = A_m,\ D_1 = A_{p+m},$$

das andere Mal

$$D_0 = B_m,\ D_1 = B_{p+m},$$

so wird im ersten Falle $D_\lambda = A_{\lambda p+m}$, im zweiten $D_\lambda = B_{\lambda p+m}$ und für deren Quotienten ergibt sich:

$$\frac{A_{\lambda p+m}}{B_{\lambda p+m}} = \frac{A_{p+m} - z' \dfrac{\lambda-1}{\lambda} A_m}{B_{p+m} - z' \dfrac{\lambda-1}{\lambda} B_m},$$

so daß die betreffende Folge allemal konvergiert und den Grenzwert

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{\lambda p+m}}{B_{\lambda p+m}} = \frac{A_{p+m} - z A_m}{B_{p+m} - z B_m} \tag{15}$$

hat, falls nur der Bruch auf der rechten Seite einen Sinn hat.

Im Falle $|D| > 0$ oder $|z - z'| > 0$, nimmt Gleichung (14) die Form an:

$$\begin{aligned} D_\lambda &= z^\lambda D_0 + \frac{z^\lambda - z'^\lambda}{z - z'} (D_1 - z D_0) \\ &= \frac{1}{z - z'} \{z^\lambda (D_1 - z' D_0) - z'^\lambda (D_1 - z D_0)\}. \\ &= \frac{z^\lambda}{z - z'} \{D_1 - z' D_0 - \zeta^\lambda (D_1 - z D_0)\}, \end{aligned}$$

wo $\zeta = \dfrac{z'}{z}$ gesetzt ist. Bei Annahme derselben Anfangswerte wie oben wird daher:

$$\frac{A_{\lambda p+m}}{B_{\lambda p+m}} = \frac{A_{p+m} - z' A_m - \zeta^\lambda (A_{p+m} - z A_m)}{B_{p+m} - z' B_m - \zeta^\lambda (B_{p+m} - z B_m)}.$$

Da $\zeta < 1$ angenommen ist, kann dieser Ausdruck bei $\lim \lambda = \infty$ nur dann einen Grenzwert haben, wenn $\zeta < 1$ ist; in diesem Falle wird dann:

$$K_m \equiv \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{\lambda p+m}}{B_{\lambda p+m}} = \frac{A_{p+m} - z' A_m}{B_{p+m} - z' B_m} \tag{16}$$

und die durch m charakterisierte Folge konvergiert allemal, wenn der Bruch auf der rechten Seite einen Sinn hat. In

diesem Falle wollen wir sagen die Folge und ihr Grenzwert seien von der „allgemeinen“ Form.

Die Bedingung $\zeta < 1$ besagt, daß die quadratische Gleichung (12) zwei Wurzeln von verschiedenem absoluten Betrage hat. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn

$$\left| \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) \right| > 0 \tag{17}$$

oder wenn keine Beziehung der Form besteht

$$S^2 = 4\,\vartheta\,P, \tag{18}$$

wo ϑ reell und $0 \leqq \vartheta < 1$ ist.

Im Falle $D = 0$ ist $S^2 = 4P$, so daß diese Bedingung von selbst erfüllt ist.

Die Bedingung (17) oder (18) ist also eine notwendige für die Konvergenz des Kettenbruches, falls nicht für alle Werte $m = 0, 1, \ldots p-1$, $A_{m,p+m}$ verschwindet.

Es ist nun aber leicht einzusehen, daß tatsächlich nicht alle $A_{m,p+m}$ verschwinden können, wenn der Kettenbruch konvergieren soll.

Zunächst gibt die Formel (c)

$$A_{m,p+m} = a_{m+1} B_{m+1,p+m}, \tag{19}$$

so daß $A_{m,p+m}$ und $B_{m+1,p+m}$ zugleich verschwinden oder nicht verschwinden. Ist nun $m = p-1$ und $A_{p-1,2p-1} = 0$, so ist

$$B_{p,2p-1} = B_{p-1} = 0$$

und daher nach Gleichung (9^a) für jedes λ

$$B_{\lambda p-1} = B_{p-1,2p-1}^{\lambda+1} B_{p-1} = 0.$$

Ist also $A_{p-1,2p-1} = 0$ oder $B_{p-1} = 0$, so divergiert der Kettenbruch deshalb, weil er unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche hat.

Wir haben also folgendes Ergebnis: für die Konvergenz des Kettenbruches sind die beiden Bedingungen

(A) $$|B_{p-1}| > 0,$$

(B) $$\left|\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right)\right| > 0 \text{ oder } D = 0$$

notwendig.

Wir setzen daher im folgenden voraus, daß diese beiden Bedingungen erfüllt sind und untersuchen, welche Bedingungen dazu kommen müssen, um sie zu hinreichenden zu ergänzen. Zunächst wird festzustellen sein, ob die erhaltenen Grenzwerte K_m endlich sind, d. h. ob die Nenner der Brüche vom Null verschieden sind.

Ist $A_{m,p+m} = 0$, hat also K_m die spezielle Form

$$K_m = \frac{A_m}{B_m},$$

so ist $|B_m| > 0$. Denn wäre $B_m = 0$, also $|A_m| > 0$, so wäre

$$B_{p+m} = B_{m,p+m} B_m = 0,$$

also auch

$$B_{p+m} = B_{p,p+m} B_p = A_{p,p+m} B_{p-1} = B_m B_p + A_m B_{p-1} = 0,$$

d. h. $B_{p-1} = 0$ gegen die Voraussetzung (A).

Ist $|A_{m,p+m}| > 0$, hat also K_m die allgemeine Form

$$K_m = \frac{A_{p+m} - z' A_m}{B_{p+m} - z' B_m},$$

so ist auch hier der Nenner von Null verschieden. Denn wäre

$$B_{p+m} - z' B_m = 0,$$

so wäre entweder $B_m = 0$, dann wäre auch $B_{p+m} = 0$ und man hätte denselben Widerspruch wie oben. Oder aber es wäre $|B_m| > 0$, dann wäre

$$z' = \frac{B_{p+m}}{B_m}$$

und dieser Wert müßte der quadratischen Gleichung (12) genügen.

Nimmt man diese aber in der Form

$$y^2 - (A_{p-1} + B_p)\,y + B_p\,A_{p-1} - A_p\,B_{p-1} = 0$$

und berücksichtigt, daß

$$B_{p+m} = B_m\,B_p + A_m\,B_{p-1}, \tag{20}$$

so findet man nach Einsetzen und Streichen

$$B_{p-1}\{B_m^2\,A_p + A_m\,B_m\,A_{p-1} - A_m\,B_m\,B_p - A_m^2\,B_{p-1}\} = 0$$

oder

$$B_{p-1}\{B_m(A_p\,B_m - A_m\,B_p) + A_m\,(A_{p-1}\,B_m - A_m\,B_{p-1})\} = 0,$$

also nach Formel (b)

$$(-1)^m a_1\,a_2 \ldots a_m\,B_{p-1}(B_m\,A_{m,p} + A_m\,A_{m,p+1}) = 0$$

und schließlich wegen $A_m = A_{p,p+m}$, $B_m = B_{p,p+m}$ nach (a′)

$$B_{p-1}\,A_{m,p+m} = 0,$$

d. h. $B_{p-1} = 0$ oder $A_{m,p+m} = 0$, was beides den Voraussetzungen widerspricht.

Sind also die Bedingungen (A) und (B) erfüllt, so hat jede der p Folgen (3) einen bestimmten endlichen Grenzwert. Es bleibt also nur noch die Frage zu erledigen, wann diese p Werte K_m übereinstimmen.

Sind zunächst zwei dieser Werte, etwa K_{m_1} und $K_{m_2}(m_1 < m_2)$ von der allgemeinen Form, so stimmen sie überein, d. h.

$$\frac{A_{p+m_1} - z'\,A_{m_1}}{B_{p+m_1} - z'\,B_{m_1}} = \frac{A_{p+m_2} - z'\,B_{m_2}}{B_{p+m_2} - z'\,B_{m_2}}.$$

Denn multipliziert man dies aus und berücksichtigt die Formel (20) und die analoge für A_{p+m}, so erhält man

$$(A_{m_2}\,B_{m_1} - A_{m_1}\,B_{m_2})\,(z'^2 - S z' + P) = 0$$

und diese Gleichung ist erfüllt, da z' Wurzel von (12) ist.

Durch die umgekehrte Rechnung folgt daraus aber die Gleichheit von K_{m_1} und K_{m_2}.

Sind also alle $|A_{m,p+m}| > 0$, so stimmen auch alle p Werte K_m überein. Diese Voraussetzung ist aber äquivalent mit $|B_{m,p+m-1}| > 0$ für $m = 0, 1, 2 \ldots, p-1$, welche, nachdem auf Seite 25 gesagten für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches notwendig ist, so daß sich der Satz ergibt:

Für die unbedingte Konvergenz unseres Kettenbruches sind die Bedingungen

(A′) $\quad |B_{m,p+m-1}| > 0 \quad (m = 0, 1, 2 \ldots, p-1)$

(B) $\quad \left| \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) \right| > 0$ oder $D = 0$

notwendig und hinreichend.

Verschwinden dagegen gewisse $A_{m,p+m}$, etwa für die Werte $m, m_1, m_2, \ldots m_n$, so müssen die Grenzwerte

$$K_m = \frac{A_m}{B_{m_1}} \; K_{m_1} = \frac{A_{m_1}}{B_{m_1}}, \ldots K_{m_n} = \frac{A_{m_n}}{B_{m_n}},$$

übereinstimmen und das gibt nach Formel (b) die Bedingungen:

(21) $\quad A_{m,m_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$

die für die Konvergenz des Kettenbruches notwendig sind. Diese Bedingung kann aber nie erfüllt sein, wenn etwa $m_1 = m + 1$ ist, da alle $|a_\nu| > 0$ sind. Sind die Bedingungen (21) erfüllt, so stimmen alle Grenzwerte der speziellen Form untereinander überein und ebenso nach dem obigen alle der allgemeinen Form, so daß es genügt, zu untersuchen, wann einer der ersten Art mit einem der zweiten übereinstimmt. Nach dem eben Gesagten kann man aber als diese Werte K_m und K_{m+1} nehmen.

Da $A_{m,p+m} = 0$, so reduziert sich die quadratische Gleichung (12) auf

(22) $\quad y^2 - (A_{m,p+m-1} + B_{m,p+m})\, y + A_{m,p+m-1} B_{m,p+m} = 0$

und sie hat daher die beiden Wurzeln $A_{m,p+m-1}$ und $B_{m,p+m}$, so daß es darauf ankommen wird, welcher von diesen beiden Werten den kleineren absoluten Betrag hat.

Ist zuerst $B_{m,p+m}$ die Wurzel mit dem kleineren absoluten Betrag, so soll sein

$$K_m = \frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{p+m+1} - B_{m,p+m} A_m}{B_{p+m+1} - B_{m,p+m} B_m} = K_{m+1},$$

woraus folgt:

$$A_{p+m+1} B_m - A_m B_{p+m+1} = B_{m,p+m} (A_{m+1} B_m - A_m B_{m+1})$$

oder nach Formel (b)

$$(-1)^m a_1 a_2 \ldots a_m A_{m,p+m+1} = (-1)^m a_1 a_2 \ldots a_{m+1} B_{m,p+m},$$

also, da nach der Rekursionsformel

(23) $$A_{m,p+m+1} = b_{m+1} A_{m,p+m} + a_{m+1} A_{m,p+m-1} = a_{m+1} A_{m,p+m-1},$$

schließlich

$$A_{m,p+m-1} = B_{m,p+m},$$

d. h. es kann Übereinstimmung nur im Falle gleicher Wurzeln bestehen, welchen Fall wir weiter unten erledigen werden.

Ist dagegen $|A_{m,p+m-1}| < |B_{m,p+m}|$, also $z' = A_{m,p+m-1}$, so findet tatsächlich Übereinstimmung statt. Denn nach (b) und Gleichung (23) ist:

$$\begin{aligned} A_{p+m+1} B_m - A_m B_{p+m+1} &= (-1)^m a_1 a_2 \ldots a_m A_{m,p+m+1} \\ &= (-1)^m a_1 a_2 \ldots a_m a_{m+1} A_m \\ &= A_{m,p+m-1} (A_{m+1} B_m - A_m B_{m+1}) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{A_{p+m+1} - A_{m,p+m-1} A_{m+1}}{B_{p+m+1} - A_{m,p+m-1} B_{m+1}} = \frac{A_m}{B_m},$$

d. h. $K_{m+1} = K_m$.

Im Falle $D > 0$ kommt also zu (21) als notwendig und hinreichend die Bedingung

(24) $$|A_{m,p+m-1}| < |B_{m,p+m}|$$

hinzu.

Verschwindet nur ein einziges $A_{m,p+m}$, so fallen die Bedingungen (21) fort. Verschwinden dagegen mehrere $A_{m_\nu, p+m_\nu}$, so ist es vielleicht nützlich zu verifizieren, daß infolge der

Bedingungen (21) und (24) die Gleichung (24) auch für jedes andere m_ν gültig ist.

In der Tat folgt aus $A_{m,p+m} = A_{m_1,p+m_1} = A_{m,m_1} = 0$ (also $|B_{m,m_1}| > 0$) nach (b′):

$$\begin{aligned} 0 = A_{m_1,p+m_1} &= B_{p+m,p+m_1} \cdot A_{m_1,p+m} + A_{p+m,p+m_1} A_{m_1,p+m-1} \\ &= B_{m,m_1} \cdot A_{m_1,p+m}. \end{aligned}$$

Also $A_{m_1,p+m} = 0$ und daher

$$\begin{aligned} A_{m,p+m-1} &= B_{m_1,p+m-1} A_{m,m_1} + A_{m_1,p+m-1} A_{m,m_1-1} \\ &= A_{m_1,p+m-1} A_{m,m_1-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{m_1,p+m_1-1} &= B_{p+m,p+m_1-1} A_{m_1,p+m} + A_{p+m,p+m_1-1} A_{m_1,p+m-1} \\ &= A_{m,m_1-1} A_{m_1,p+m-1}, \end{aligned}$$

also $A_{m,p+m-1} = A_{m_1,p+m_1-1}$, und wegen der Konstanz von S auch

$$B_{m,p+m} = B_{m_1,p+m_1},$$

so daß (24) offenbar auch für m_1 gilt.

Ist $D = 0$, so sind die Bedingungen (21) von selbst erfüllt. Denn die quadratische Gleichung hat dann nur eine Wurzel, und wenn $A_{m,p+m} = 0$ und $A_{m_1,p+m_1} = 0$ genügen ihr sowohl $B_{m,p+m}$ als $B_{m_1,p+m_1}$, so daß

$$B_{m,p+m} = B_{m_1,p+m_1}.$$

Es ist aber dann wegen $A_{m,p+m} = 0$ und Gleichung (20)

$$B_{p+m} = B_{m,p+m} B_m = B_m B_p + A_m B_{p-1},$$

also

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{B_p - B_{m,p+m}}{B_{p-1}},$$

und ebenso

$$\frac{A_{m_1}}{B_{m_1}} = \frac{B_p - B_{m_1,p+m_1}}{B_{p-1}},$$

also tatsächlich

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{m_1}}{B_{m_1}}.$$

Die Grenzwerte der speziellen Form stimmen also alle untereinander überein und ihre Gleichheit mit denen der allgemeinen Form ergibt sich genau wie oben.

Fassen wir alles bisherige zusammen, so bekommen wir den folgenden Satz:

„Für die Konvergenz des p-gliedrig rein periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty{}_\nu$ ist notwendig, daß

(A) $$|B_{p-1}| > 0.$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend, falls

$$D = 0 \quad (D = (A_{p-1} - B_p)^2 + 4 A_p B_{p-1}).$$

Ist $|D| > 0$, so ist weiter notwendig, daß

(B) $$\left| \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) \right| > 0 \quad (S = A_{p-1} + B_p = A_{r,p+r-1} + B_{r,p+r}).$$

Die Bedingungen (A) und (B) zusammen sind auch hinreichend, wenn $A_{m,p+m}$ für keinen Wert von $m = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ verschwindet; der Kettenbruch ist dann unbedingt konvergent und sein Wert ist

$$\frac{A_p}{B_p - z'},$$

wo z' die absolut genommen kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung

$y^2 - Sy + P = 0 \quad (P = (-1)^p a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_{r+p};\ r = 0, 1, 2 \ldots)$

ist.[1])

[1]) Ist $\sqrt{D}$ der Hauptwert der Wurzel und bestimmt man $\varepsilon = \pm 1$ so, daß

$$|S - \varepsilon \sqrt{D}| < |S + \varepsilon \sqrt{D}|,$$

also $2d = S - \varepsilon\sqrt{D}$, so wird

$$\frac{A_p}{B_p - z'} = \frac{A_{p-1} - z'}{B_{p-1}} = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon\sqrt{D}}{2 B_{p-1}} = x,$$

wobei x_1 die eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$B_{p-1} x^2 - (A_{p-1} - B_p) x - A_p = 0$$

ist, und zwar genau die durch die übliche Form der Kriterien für den Wert des Kettenbruches vorgeschriebene Wurzel. (Vgl. Pringsheim 2, p. 480).

Verschwindet dagegen ein $A_{m,p+m}$, so tritt an Stelle von (B) die Bedingung

(C) $$|A_{m,p+m-1}| < |B_{m,p+m}|$$

und diese ist mit (A) zusammen auch hinreichend, wenn kein weiteres $A_{m,p+m}$ verschwindet, während im Falle, daß auch

$$A_{m_1,p+m_1} = 0, \ldots, A_{m_n,p+m_n} = 0,$$

als notwendig und hinreichend die Bedingungen

(D) $$A_{m,m_\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

hinzutreten. Der Wert des Kettenbruches ist dann $\frac{A_m}{B_m}$."

Diese Bedingungen unterscheiden sich von den Pringsheimschen (Pringsheim 2, p. 480) nur dadurch, daß die dortigen Bedingungen [3] hier durch andere ersetzt sind, die für den allgemeinen Fall genau dieselbe Form besitzen, wie die dortige auf einen Spezialfall bezügliche Bedingung [2ª]. Dieselben bieten den Vorteil, unabhängig von den Wurzeln der quadratischen Gleichung zu sein, und gestatten außerdem eine genauere Einsicht in die Verhältnisse, indem sie erkennen lassen, daß Ausnahmefälle nur dann eintreten können, wenn die Bedingungen der unbedingten Konvergenz nicht erfüllt sind. In der Tat ergibt sich leicht, daß die Bedingung (C) weiter nichts aussagt, als daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}{}_\nu$ außerwesentlich divergiert.

Um dies deutlich zu machen, müssen wir die Bedingungen der außerwesentlichen Divergenz, etwa für $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\mathrm{I}}^{\infty}{}_\nu$ kurz angeben. Dazu ist zunächst notwendig, daß $B_{p-1} = 0$, also $A_{p-1,2p-1} = 0$, da sonst K_1 einen endlichen Wert hätte. Verschwindet dann noch ein $A_{m,p+m}$, so muß auch $B_m = 0$ sein, das heißt $A_{m,p-1} = 0$. Ist dagegen $|A_{m,p+m}| > 0$ und soll $\frac{1}{K_m} = 0$, so ist zu entscheiden, ob $z' = A_{p-1}$ oder $z' = B_p$ zu nehmen ist. Im ersten Falle findet Divergenz nur dann statt, wenn $D = 0$, während im Falle $|B_p| < |A_{p-1}|$ diese Bedingungen für die außer-

wesentliche Divergenz auch hinreichend sind, wie man durch analoge Rechnungen wie oben findet.

Diese Bedingungen sind nun für $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ tatsächlich erfüllt, wenn (A), (C), (D) gelten. Denn da $A_{m,\,p+m} = 0$ und daher $B_{m+1,\,p+m} = 0$, so ist nach (b′) und (c):

$$\begin{aligned} B_{m+1,\,p+m+1} &= b_{m+1}\,B_{m+1,\,p+m} + a_{m+1}\,B_{m+1,\,p+m-1} \\ &= a_{m+1}\,B_{m+1,\,p+m-1} = A_{m,\,p+m-1}, \end{aligned}$$

$$B_{m,\,p+m} = b_{m+1}\,B_{m+1,\,p+m} + A_{m+1,\,p+m} = A_{m+1,\,p+m},$$

also kehren sich die Bedingungen

$$|A_{m,\,p+m-1}| < B_{m,\,p+m}|$$

um in

$$|B_{m+1,\,p+m+1}| < |A_{m+1,\,p+m}|,$$

die gerade die Divergenz von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ liefern.

Um zu zeigen, daß die angegebene Form der Konvergenz- und Divergenzbedingungen tatsächlich eine genauere Einsicht in die Sachlage gestatten, und daß die Unterscheidung zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz nicht müßig ist, sei hier noch die Verallgemeinerung eines bekannten Galoisschen Satzes auf Kettenbrüche mit beliebigen Elementen behandelt (vgl. Pringsheim 2).

Es heiße der unrein periodische Kettenbruch

$$\begin{aligned} &b_p + \frac{a_p|}{|b_{p-1}} + \frac{a_{p-1}|}{|b_{p-2}} + \cdots + \frac{a_2|}{|b_1} + \frac{a_1|}{|b_p} + \frac{a_p}{|b_{p-1}} \\ &\qquad + \cdots + \frac{a_2|}{b_1} + \frac{a_1}{|b_p} + \cdots \end{aligned} \tag{25}$$

mit der umgekehrten Gliederreihenfolge zu dem ursprünglichen konjugiert. Es mögen alle oben definierten Größen, falls sie mit einem Akzent versehen werden, sich auf diesen zweiten Kettenbruch beziehen. Man erkennt dann ohne Mühe etwa durch den Schluß von n auf $n + 1$, daß für die Näherungsnenner der beiden Kettenbrüche die Beziehung gilt

(26) $$B_{\mu,\nu} = B'_{\lambda p-\nu-1,\,\lambda p-\mu-1} \quad (\nu > \mu \geqq 0),$$

wobei λ beliebig, aber so groß zu wählen ist, daß die Indizes von B' größer oder gleich Null ausfallen. Insbesondere ist dann

(27) $$B_{p-1} = B'_{0,\,p-1},$$

(28) $$B_p = B'_{p-1,\,2p-1}.$$

Für die $A_{\mu,\nu}$ gilt keine so einfache Formel, man kann sie aber mit Hilfe von Gleichung (26) auf Grund der Hilfsformel (c) ebenfalls transformieren. So ergibt sich

(29) $$\begin{aligned} S &= A_{p-1} + B_p = a_1 B_{1,\,p-1} + B_p = a_1 B'_{p,\,2p-2} + B'_{p-1,\,2p-1} \\ &= A'_{p-1,\,2p-2} + B'_{p-1,\,2p-1} = S', \end{aligned}$$

während

(30) $$P = P'$$

unmittelbar ersichtlich ist; es ist daher auch

(31) $$D = D'.$$

Die für die Konvergenz notwendigen Bedingungen (A) und (B) sind also für beide Kettenbrüche identisch und im Falle $D = D' = 0$ konvergieren beide Kettenbrüche. Um den Fall $D \mid > 0$ zu untersuchen, bemerke man, daß nach (26)

(32) $$B_{m+1,\,p+m} = B'_{(\lambda-1)p-m-1,\,\lambda p-m-2},$$

so daß, falls ein $B_{m+1,\,p+m}$ (oder $A_{m,\,p+m}$) verschwindet, auch ein $B'_{(\lambda-1)p-m-1,\,\lambda p-m-2}$ (oder $A'_{(\lambda-1)p-m-2,\,\lambda p-m-2}$) verschwindet und umgekehrt, und daher aus der unbedingten Konvergenz des einen Kettenbruches die unbedingte Konvergenz des anderen folgt. Im Falle der erste Kettenbruch nur bedingt konvergiert, sei etwa $A_{p-n-2,\,2p-n-2} = B_{p-n-1,\,2p-n-2} = 0$ und daher nach (24)

(33) $$\mid A_{p-n-2,\,2p-n-3} \mid < \mid B_{p-n-2,\,2p-n-2} \mid.$$

Dann wird

(34) $$A'_{n,\,p+n} = B'_{n+1,\,p+n} = 0$$

und

$$(35)\quad \begin{cases} A_{p-n-2,\,2p-n-3} = a_{p-n-1}\,B_{p-n-1,\,2p-n-3} = a_{p-n-1}\,B'_{n+2,\,p+n} \\ \qquad = A'_{n+1,\,p+n}, \\ B_{p-n-2,\,2p-n-2} = B'_{n+1,\,p+n+1}; \end{cases}$$

da aber nach Hilfsformel (c) und mit Hilfe von (34)

$$B'_{n,\,p+n} = b_{p-n-1}\,B'_{n+1,\,p+n} + A'_{n+1,\,p+n} = A'_{n,\,p+n},$$

$$B'_{n+1,\,p+n+1} = b_{p-n-1}\,B'_{n+1,\,p+n} + a_{p-n}\,B'_{n+1,\,p+n-1}$$

$$= a_{p-n-1}\,B'_{n+1,\,p+n-1} = A'_{n,\,p+n-1},$$

so kehrt sich die Beziehung (33) um in

$$(36)\qquad |B'_{n,\,p+n}| < |A'_{n,\,p+n-1}|,$$

d. h. gerade in die Divergenzbedingung für den konjugierten Kettenbruch. Konvergiert also der gegebene Kettenbruch nur bedingt ($|D_\nu| > 0$), so divergiert der konjugierte und dasselbe gilt auch umgekehrt.

Im Falle der konjugierte Kettenbruch konvergiert, bleibt noch sein Wert zu berechnen. Man hat für die Werte der beiden Kettenbrüche die immer gültigen Formeln

$$(37)\quad \begin{cases} K = \dfrac{A_{2p-1} - z' A_{p-1}}{B_{2p-1} - z' B_{p-1}}, \\ K' = b_p + \dfrac{A'_{0,\,2p-1} - z' A'_{0,\,p-1}}{B'_{0,\,2p-1} - z' B'_{0,\,p-1}} = b_p + \dfrac{a_p B_{2p-2} - z' a_p B_{p-2}}{B_{2p-1} - z' B_{p-1}} \\ \qquad = \dfrac{B_{2p} - z' B_p}{B_{2p-1} - z' B_{p-1}}, \end{cases}$$

und da

$$B_{2p-1} = B_{p-1}\,B_p + A_{p-1}\,B_{p-1} = B_{p-1} \cdot S$$

$$A_{2p-1} - B_{2p} = B_{p-1}\,A_p + A_p^2 - B_p^2 - B_{p-1}\,A_p = A_{p-1}^2 - B_p^2$$

$$= (A_{p-1} - B_p) \cdot S,$$

so wird

$$(38)\quad \begin{cases} K - K' = \dfrac{(A_{2p-1} - B_{2p}) - z'(A_{p-1} - B_p)}{B_{2p-1} - z' B_{p-1}} \\ \qquad = \dfrac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}} \dfrac{S - z'}{S - z'} = \dfrac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}. \end{cases}$$

Nun ist, wie man leicht erkennt, K gleich der einen Wurzel x_1 der quadratischen Gleichung

$$B_{p-1}\,x^2 + (B_p - A_{p-1})\,x - A_p = 0, \tag{39}$$

also nach (38) K' gleich dem negativen Werte der anderen Wurzel:

$$K = x_1, \qquad K' = -x_2. \tag{40}$$

Im Falle $D = 0$ wird daher

$$K = -K' = \frac{A_{p-1} - B_p}{2\,B_{p-1}}. \tag{41}$$

Zusammengefaßt hat man also das Resultat:

„Konvergiert der gegebene Kettenbruch und ist $D = 0$, so konvergiert auch der konjugierte und die Werte der beiden Kettenbrüche sind entgegengesetzt gleich.

Ist $|D| > 0$, so konvergieren beide Kettenbrüche, falls der eine von ihnen unbedingt konvergiert und für ihre Werte gilt die Gleichung (40). Konvergiert einer von ihnen nur bedingt, so divergiert der andere."

§ 3. Kettenbrüche, die eine Erweiterung des eingliedrig-limitär-periodischen Typus darstellen.

„Es seien z und z' die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 - by - a = 0 \tag{1}$$

und es sei

$$0 < (1-\vartheta)^2 \leqq \left|\frac{z'}{z}\right| \leqq \vartheta < 1. \tag{2}$$

Ist dann ε eine positive Zahl, die der Bedingung genügt,

$$\varepsilon \leqq \frac{1}{1+\vartheta} \tag{3}$$

und ist $1-\Theta$ $(0 < \Theta < 1)$ die stets vorhandene, zwischen Null und Eins gelegene Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\varepsilon t^2 + t = 1 - \vartheta, \tag{4}$$

gelten schließlich für die Teilzähler und Nenner des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ die Ungleichungen:

$$\left|\frac{a_\nu - a}{z^2}\right| \leqq \vartheta(1-\vartheta)^3(\Theta - \vartheta) \quad \text{für } \nu \geqq 2 \tag{5}$$

$$\left|\frac{b_\nu - b}{z}\right| \leqq \vartheta^4(1-\vartheta)^2(\Theta - \vartheta) \quad \text{für } \nu \geqq 1, \tag{6}$$

so konvergiert der Kettenbruch (unbedingt).

Sind dabei a, b, a_ν, b_ν Funktionen irgend welcher Variablen in einem Bereiche T, während ϑ und ε Konstanten sind, und gelten die Beziehungen 1), 5), 6) für alle Werte der Variablen

in T, so ist die Konvergenz des Kettenbruches in T eine gleichmäßige."

Dieser Satz ist eine Erweiterung des Satzes über limitär-periodische Kettenbrüche (van Vleck, Pringsheim 4) und stammt (außer einer unwesentlichen Verschiedenheit in den Werten der Konstanten) von O. Perron (Lehrbuch § 56). Die Annahme der scheinbar allgemeineren Form mit beliebigen Teilnennern b_ν ist nicht in der Sache begründet, sie wurde hier nur mit Rücksicht auf eine Anwendung im folgenden Paragraphen gewählt. Will man nur den vorliegenden Fall behandeln, so kann man in der Tat von vorneherein auf die Annahme $b_\nu = 1$ beschränken und den Satz in einfacherer Form aussprechen, wobei der Beweis genau wie unten verläuft, sich aber erheblich einfacher gestaltet. Der hier gegebene Beweis ist eine Modifikation des Pringsheimschen Beweises für den limitär-periodischen Fall und hat den Vorzug, sich auf mehrgliedrig limitär-periodische Kettenbrüche übertragen zu lassen, wie im folgenden Paragraphen ausgeführt ist.

Zu der Form der gemachten Bedingungen sei noch bemerkt, daß wegen (4)

$$1 - \vartheta - (1 - \Theta) = \varepsilon (1 - \Theta)^2 > 0,$$

also

$$1 > \Theta > \vartheta, \tag{7}$$

die auf der rechten Seite von (5) und (6) vorkommenden Größen deshalb alle positiv sind. Außerdem sei noch hinzugefügt, daß die Bedingung $\left|\frac{z'}{z}\right| > (1 - \vartheta)^2$ die Tragweite des Satzes nicht einschränkt, da die dadurch ausgeschlossenen Fälle sich mit Hilfe des bekannten Pringsheimschen Kriteriums (§ 1 Satz 1) leicht erledigen lassen. In der Tat kann ja bei einem numerischen Kettenbruche nur dann $\left|\frac{z'}{z}\right| = 0$ sein, wenn $a = 0$. Dann kann man aber $a_\nu| < \frac{1}{4}$ annehmen. Bei einem Kettenbruche, dessen Glieder Funktionen gewisser Variablen sind, kann man den Variabilitätsbereich so zerlegen, daß man das

eine Mal mit dem obigen Satze, das andere Mal mit dem zitierten Kriterium operiert.

Zum Beweise des Satzes bestimme man eine Zahl z_1 so, daß

$$\left|1 - \frac{z_1}{z}\right| \leqq \vartheta\,(1 - \vartheta)\,(\Theta - \vartheta), \tag{8}$$

und definiere die Zahlen z_ν und z'_ν durch die Formeln

$$z_\nu + z'_\nu = b_\nu \quad (\nu \geqq 1); \; z_{\nu-1}\, z_\nu = -\, a_\nu \;\; (\nu \geqq 2). \tag{9}$$

Hierdurch sind die Zahlen z_ν und z'_ν eindeutig bestimmt, und es gilt allgemein für $\nu \geqq 1$ die Beziehung:

$$\left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right| \leqq \vartheta\,(1 - \vartheta)\,(\Theta - \vartheta). \tag{10}$$

Es werde in der Tat angenommen, dies gelte für alle Werte bis zu einem bestimmten ν. Dann folgt aus den Beziehungen (9):

$$a_{\nu+1} = -\, z_\nu\, z'_{\nu+1} = -\, z_\nu (b_{\nu+1} - z_{\nu+1})$$

oder

$$z_\nu\, z_{\nu+1} = a_{\nu+1} + z_\nu\, b_{\nu+1},$$

und wenn man auf beiden Seiten $z\, z_\nu$ subtrahiert

$$z_\nu (z_{\nu+1} - z) = a_{\nu+1} + z_\nu (b_{\nu+1} - z).$$

Da z und z' Wurzeln der quadratischen Gleichung (1) sind, so ist

$$z + z' = b, \qquad z\, z' = -\, a, \tag{11}$$

und es ergibt sich daher aus (9), wenn man darin auf der rechten Seite z durch $z' - b$ ersetzt und die sich aufhebenden Glieder a und $-\, z\, z'$ zusetzt:

$$z_\nu (z_{\nu+1} - z) = a_{\nu+1} - a + z_\nu (b_{\nu+1} - b) + z\,(z_\nu - z).$$

Dividiert man dies durch z^2, so folgt für die absoluten Beträge

$$\left|\frac{z_\nu}{z}\right| \cdot \left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{z}\right| < \left|\frac{a_{\nu+1} - a}{z^2}\right| + \left|\frac{z_\nu}{z}\right| \cdot \left|\frac{b_{\nu+1} - b}{z}\right| + \left|\frac{z}{z}\right| \cdot \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right|. \tag{12}$$

Beachtet man, daß nach (10) einmal

$$\left|\frac{z_\nu}{z}\right| \geqq 1 - \vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta), \tag{13}$$

andererseits

$$\left|\frac{z_\nu}{z}\right| < 1 + \vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta) < 1 + 1 - \vartheta = 2 - \vartheta < \frac{1}{\vartheta}, \tag{14}$$

und berücksichtigt die Beziehungen (2), (5) und (6), so erhält man aus (12)

$$\left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{z}\right| \leqq \frac{\vartheta(1-\vartheta)^3(\Theta-\vartheta) + \vartheta^3(1-\vartheta)^2(\Theta-\vartheta) + \vartheta^2(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta)}{1-\vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta)}$$

$$= \vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta)\,\frac{(1-\vartheta)^2 + \vartheta^2(1-\vartheta) + \vartheta}{1-\vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta)}$$

$$= \vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta)\,\frac{1-\vartheta(1-\vartheta)^2}{1-\vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta)},$$

also schließlich wegen (7)

$$\left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{z}\right| \leqq \vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta). \tag{15}$$

Die Beziehung (10) gilt also unter den gemachten Voraussetzungen auch, wenn man darin ν durch $\nu+1$ ersetzt, also allgemein. Gleichzeitig ist damit auch gezeigt, daß die Größen z_ν von 0 verschieden ausfallen. Dasselbe gilt dann auch für die z'_ν.

In der Tat wird ja

$$|z' - z'_\nu| = |b - z - (b_\nu - z_\nu)| < |z| \cdot \left(\left|\frac{b-b_\nu}{z}\right| + \left|\frac{z_\nu - z}{z}\right|\right)$$

$$< |z| \cdot \{\vartheta^4(1-\vartheta)^2(\Theta-\vartheta) + \vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta)\}$$

$$< |z|\,\vartheta(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta)\{1+1-\vartheta\}$$

$$< |z|(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta) < |z|(1-\vartheta)^2,$$

und da nach (2)

$$|z'| \geqq |z|(1-\vartheta)^2,$$

so wird

$$|z'_\nu| \geqq |z'| - |z' - z'_\nu| > |z|(1-\vartheta)^2 - |z|(1-\vartheta)^2 = 0,$$

also

$$|z'_\nu| > 0. \tag{16}$$

Führt man noch die Bezeichnungen ζ und ζ_ν ein durch die Gleichungen

$$\zeta = \frac{z'}{z}, \qquad \zeta_\nu = \frac{z'_\nu}{z_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots), \tag{17}$$

so ergibt sich für deren Differenz die folgende Beziehung

$$|\zeta - \zeta_\nu| = \left|\frac{b-z}{z} - \frac{b_\nu - z_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{b}{z} - \frac{b_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \left|\frac{b}{z_\nu}\right| \cdot \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{z_\nu}\right| \cdot |b - b_\nu| = \left|\frac{z}{z_\nu}\right| \cdot \left\{\left|\frac{b}{z}\right| \cdot \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right| + \left|\frac{b-b_\nu}{z}\right|\right\}. \tag{18}$$

Da nach (2)

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|\frac{b}{z} - 1\right| \leqq \vartheta,$$

also erst recht

$$\left|\frac{b}{z}\right| < 1 + \vartheta,$$

so folgt aus (17) mit Rücksicht auf (6), (10) und (14)

$$|\zeta - \zeta_\nu| \leqq \frac{\vartheta(1+\vartheta)(1-\vartheta)(\Theta-\vartheta) + \vartheta^4(1-\vartheta)^2(\Theta-\vartheta)}{\vartheta} \tag{19}$$

$$< (\Theta - \vartheta)(1 - \vartheta^2) + (\Theta - \vartheta)\vartheta^2 = \Theta - \vartheta,$$

also

$$|\zeta_\nu| \leqq |\zeta| + |\zeta - \zeta_\nu| \leqq \vartheta + \Theta - \vartheta = \Theta < 1, \tag{20}$$

so daß die Reihe

$$s = \zeta_1 + \zeta_1\zeta_2 + \cdots + \zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_\nu + \cdots \tag{21}$$

absolut konvergiert.

Man hat aber noch genauer

$$|s - \sum_1^\infty{}_\nu \zeta^\nu| < \sum_1^\infty{}_\nu |\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_\nu - \zeta^\nu|$$

und

$$|\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_\nu - \zeta^\nu| = |\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}(\zeta - (\zeta - \zeta^\lambda)) - \zeta^\nu| \tag{22}$$

$$\leqq \prod_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}(\vartheta + |\zeta - \zeta_\lambda|) - \vartheta^\nu,$$

indem man nämlich das Produkt ausrechnet, dann die vorkommenden Größen abschätzt und wiederum zu den Produkten zusammenfaßt; oder

$$|\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_\nu - \zeta^\nu| \leq \Theta^\nu - \vartheta^\nu < (\Theta - \vartheta) \cdot \nu \cdot \Theta^{\nu-1},$$

und da mit Rücksicht auf die quadratische Gleichung (4)

$$\Theta - \vartheta = (1 - \vartheta) - (1 - \Theta) = \varepsilon (1 - \Theta)^2,$$

schließlich

$$|\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_\nu - \zeta^\nu| < \varepsilon (1 - \Theta)^2 \nu \cdot \Theta^{\nu-1},$$

und daher

$$(23) \qquad \left| s - \frac{\zeta}{1-\zeta} \right| \leq \varepsilon (1 - \Theta)^2 \sum_1^\infty{}_\nu \, \nu \cdot \Theta^{\nu-1} = \varepsilon.$$

Daraus folgt nun nach (3)

$$|1 + s| \geq \left| \frac{1}{1+\zeta} \right| - \left| \frac{\zeta}{1-\zeta} - s \right| > \frac{1}{1+\vartheta} - \varepsilon > 0.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist die Konvergenz des Kettenbruches sofort bewiesen. Setzt man nämlich in dem Kettenbruche für a_ν und b_ν ihre Werte aus Gleichung (9) ein und geht zu dem äquivalenten Kettenbruche über, so wird

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty{}_\nu = \frac{a_1}{|z_1 + z_1'|} - \frac{z_1 z_2'}{|z_2 + z_2'|} - \dots - \frac{z_{\nu-1} z_\nu'}{|z_\nu + z_\nu'|} \dots$$

$$= \frac{a_1}{z_1} \left\{ \frac{\zeta_1}{|1 + z_1|} - \frac{\zeta_2}{|1 + \zeta_2|} - \dots - \frac{\zeta_\nu}{|1 + \zeta_\nu|} \dots \right\},$$

und wenn man die schon in § 1 angewandte Eulersche Transformationsformel benutzt

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty{}_\nu = \frac{a_1}{z_1'} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \zeta_1 + \zeta_1 \zeta_2 + \dots + \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_\nu + \dots} \right\}$$

$$= \frac{a_1}{z_1'} \left(1 - \frac{1}{1+s} \right),$$

und da der Nenner der rechten Seite wegen $z_1 > 0$ und $|1 + s > 0$ von 0 verschieden ist, so ist damit die Konvergenz des Kettenbruches bewiesen.

Daß diese, im Falle die Glieder des Kettenbruches Funktionen irgend welcher Variablen sind, auch gleichmäßig konvergiert, ist unmittelbar einleuchtend, da s dem absoluten Werte nach unter einer konvergenten numerischen Reihe mit positiven Gliedern und zugleich über einer gewissen positiven Zahl bleibt.

§ 4. Mehrgliedrig limitär-periodische Kettenbrüche.

Wir betrachten jetzt einen Kettenbruch der Form

$$(1)\quad \frac{a_1^{(1)}|}{|b_1^{(1)}} + \frac{a_1^{(2)}|}{|b_1^{(2)}} + \cdots + \frac{a_1^{(p)}|}{|b_1^{(p)}} + \cdots + \frac{a_\nu^{(1)}|}{|b_\nu^{(1)}} + \frac{a_\nu^{(2)}|}{|b_\nu^{(2)}} + \cdots + \frac{a_\nu^{(p)}}{|b_\nu^{(p)}} + \cdots,$$

dessen Näherungszähler und Nenner A_ν und B_ν seien, und daneben den p-gliedrig-periodischen Kettenbruch

$$(2)\quad \frac{a^{(1)}|}{|b^{(1)}} + \frac{a^{(2)}|}{|b^{(2)}} + \cdots + \frac{a^{(p)}|}{|b^{(p)}} + \cdots + \frac{a^{(1)}|}{|b^{(1)}} + \frac{a^{(2)}|}{|b^{(2)}} + \cdots + \frac{a^{(p)}|}{|b^{(p)}} + \cdots,$$

dessen Näherungszähler und Nenner A_ν und $\overline{B}_\nu$ seien, und wobei allgemein das Dach andeuten soll, daß sich die Größen auf diesen zweiten Kettenbruch beziehen.

Es sei dann

$$(3)\quad |a^{(m)} - a_\nu^{(m)}| \leqq \alpha_m, \qquad |b^{(m)} - b_\nu^{(m)}| < \beta_m$$

für

$$m = 1, 2, 3, \ldots, p; \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei die α_m und β_m kleine Größen sind, die noch gewissen Bedingungen zu unterwerfen sind. Es sei entsprechend den Bezeichnungen des § 2

$$(4)\quad S = \bar{A}_{m,p+m-1} + \overline{B}_{m,p+m}, \qquad P = (-1)^p a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(p)}$$

und es seien z und z' die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(5)\quad y^2 - Sy + P = 0,$$

und es sei

$$(6)\quad 0 < (1-\vartheta)^2 < \left|\frac{z'}{z}\right| < \vartheta < 1.$$

Ferner mögen für $m = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ die Größen $A_{m,p+m}$ über einer positiven Schranke bleiben:

$$|A_{m,p+m}| \geqq g \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, (p-1). \tag{7}$$

Schließlich mögen ε und Θ die entsprechende Bedeutung wie im vorigen Paragraphen haben, d. h. es sei $\varepsilon < \frac{1}{1+\vartheta}$ und $(1-\Theta)$ genüge der quadratischen Gleichung:

$$\varepsilon(1-\Theta)^2 + (1-\Theta) = 1 - \vartheta. \tag{8}$$

Die Behauptung ist dann, daß der Kettenbruch (1) bei gehöriger Einschränkung der Größen ε, α_m und β_m konvergiert.

Sind die Teilzähler und Nenner des Kettenbruches Funktionen einer oder mehrerer Variablen in einem gewissen Bereiche T und die Größen ϑ, ε, α_m, β_m Konstanten, so konvergiert der Kettenbruch in T gleichmäßig.

Die Methode zur Behandlung dieses Falles beruht auf den Resultaten der beiden vorigen Paragraphen: man zerlegt auch hier den Kettenbruch in p kontrahierte Kettenbrüche derart, daß diese den Bedingungen des letzten Paraphen genügen, und beweist dann die Übereinstimmung ihrer Grenzwerte. Es sollen dabei nicht, wie es den genauen Angaben des letzten Paragraphen entsprechen würde, numerische Grenzen für die ε, α_m, β_m angegeben werden, da dies bei diesem ganz allgemeinen Fall zu komplizierten Abschätzungen und allzu zahlreichen neuen Bezeichnungen führen würde. Tatsächlich wird der Nutzen dieses Satzes ja in dem Beweis der Konvergenz des p-gliedrig limitär-periodischen Kettenbruches liegen, und bei diesem wird es nur darauf ankommen, die Konvergenz des Teilkettenbruches von einer beliebig entfernten Stelle an zu beweisen.

Bezeichnet wieder D_ν gemeinsam den ν^{ten} Näherungszähler und Nenner von (1), so folgt aus der allgemeinen Formel (d) für

$$n = (\lambda+1)p + m, \quad m = \lambda p + m, \quad r = (\lambda+1)p + m$$

$$D_{(\lambda+1)p+m} = \frac{A_{(\lambda-1)p+m,\,(\lambda+1)p+m}}{A_{(\lambda-1)p+m,\,\lambda p+m}} D_{\lambda p+m}$$

(9)
$$- (-1)^p a_{\lambda-1}^{m+1} a_{\lambda-1}^{m+2} \dots a_{\lambda}^{m} \frac{A_{\lambda p+m,\,(\lambda+1)p+m}}{A_{(\lambda-1)p+m,\,\lambda p+m}} D_{(\lambda-1)p+m},$$

oder wenn man zur Abkürzung

(10)
$$\begin{cases} \dfrac{A_{(\lambda-1)p+m,\,(\lambda+1)p+m}}{A_{(\lambda-1)p+m,\,\lambda p+m}} = S_{\lambda+1}^{(m)}, \\ (-1)^p a_{\lambda-1}^{(m+1)} \dots a_{\lambda-1}^{(p)} a_{\lambda}^{(1)} \dots a_{\lambda}^{(m)} \dfrac{A_{\lambda p+m,\,(\lambda+1)p+m}}{A_{(\lambda-1)p+m,\,\lambda p+m}} = P_{\lambda+1}^{(m)} \end{cases}$$

setzt,

(11)
$$D_{(\lambda+1)p+m} = S_{\lambda+1}^{(m)} D_{\lambda p+m} - P_{\lambda+1}^{(m)} D_{(\lambda-1)p+m}.$$

Da $S_{\lambda+1}^{(m)}$ und $P_{\lambda+1}^{(m)}$ rationale, also stetige Funktionen einer endlichen Anzahl von Teilzählern und Teilnennern des Kettenbruches sind, so unterscheiden sie sich beliebig wenig von den Ausdrücken S und P, falls nur die Größen α_m und β_m klein genug sind, unter der Voraussetzung, daß die vorkommenden Nenner von Null verschieden sind. Dies letztere verbürgt aber die Bedingung (7). Daß trotz der formalen Verschiedenheit die Ausdrücke (10) sich tatsächlich wenig von S und P unterscheiden, ist unmittelbar einleuchtend, wenn man beachtet, daß

$$\frac{A_{m,\,2p+m}}{A_{m,\,p+m}} = \frac{\overline{B}_{m,\,p+m} A_{m,\,p+m} + \bar{A}_{m,\,p+m} A_{m,\,p+m-1}}{A_{m,\,p+m}}$$
$$= A_{m,\,p+m-1} + B_{m,\,p+m} = S$$

ist und daß unter den gemachten Voraussetzungen der Quotient $\frac{A_{\lambda p+m,\,(\lambda+1)p+m}}{A_{(\lambda-1)p+m,\,\lambda p+m}}$ nahe an $\frac{A_{m,\,p+m}}{A_{m,\,p+m}} = 1$ liegt.

Es seien also zunächst die Größen α_m und β_m soweit eingeschränkt, daß entsprechend den Gleichungen (5) und (6) des vorigen Paragraphen

(12)
$$\begin{cases} \left|\dfrac{S - S_{\lambda+1}^{(m)}}{z^2}\right| \leqq \vartheta(1-\vartheta)^3(\Theta-\vartheta) \\ \left|\dfrac{P - P_{\lambda+1}^{(m)}}{z}\right| \leqq \vartheta(1-\vartheta)^2(\Theta-\vartheta) \end{cases} \quad \begin{matrix} m = 0, 1, 2, \dots, (p-1) \\ \lambda = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

Definiert man dann die Größen $z_1^{(m)}$ (für $m = 0, 1, 2, \ldots, p-1$), so daß

$$\left| 1 - \frac{z_1^{(m)}}{z} \right| \leqq \vartheta (1 - \vartheta) (\Theta - \vartheta) \tag{13}$$

und ferner die Größen $z_\lambda^{(m)}$ und $z'^{(m)}_\lambda$ für $m = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ durch die Gleichungen

$$z_\lambda^{(m)} + z'^{(m)}_\lambda = S_\lambda^{(m)} \quad (\lambda \geqq 1); \quad z_{\lambda-1}^{(m)} z'^{(m)}_\lambda = P_\lambda^{(m)} \quad (\lambda \geqq 2), \tag{14}$$

so sind nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen diese Größen alle eindeutig bestimmt und wenn man noch

$$\zeta_\lambda^{(m)} = \frac{z'^{(m)}_\lambda}{z_\lambda^{(m)}}; \qquad \zeta = \frac{z'}{z} \tag{15}$$

setzt, so konvergieren die p unendlichen Reihen

$$s^{(m)} = \sum_2^\infty{}_\nu \, \zeta_2^{(m)} \zeta_3^{(m)} \ldots, \zeta_\nu^{(m)} \tag{16}$$

absolut und ihre Summen unterscheiden sich um weniger als ε von $\dfrac{\zeta}{1-\zeta}$:

$$\left| s^{(m)} - \frac{\zeta}{1-\zeta} \right| \leqq \varepsilon. \tag{17}$$

Hiernach kann man die Rekursionsformeln (9) auflösen. Beachtet man nämlich die Gleichungen (11) und (14) und setzt zur Abkürzung

$$D_\lambda^{(m)} = D_{\lambda p + m} \text{ für } m = 0, 1, 2, \ldots, p-1; \ \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

so nehmen diese die Form an

$$D_{\lambda+1}^{(m)} = (z_{\lambda+1}^{(m)} + z'^{(m)}_{\lambda+1}) D_\lambda^{(m)} - z_\lambda^{(m)} z'^{(m)}_{\lambda+1} D_{\lambda-1}^{(m)},$$

oder

$$D_{\lambda+1}^{(m)} - z_{\lambda+1}^{(m)} D_\lambda^{(m)} = z'^{(m)}_{\lambda+1} (D_\lambda^{(m)} - z_\lambda^{(m)} D_{\lambda-1}^{(m)}). \tag{19}$$

Ersetzt man hierin λ durch $\lambda - 1$, $\lambda - 2, \ldots, 3, 2$ und multipliziert die entstehenden Gleichungen alle mit (19), so kommt

(20) $D_{\lambda+1}^{(m)} - z_{\lambda+1}^{(m)} D_{\lambda}^{(m)} = z_2'^{(m)} z_3'^{(m)} \ldots, z_{\lambda+1}'^{(m)} (D_1^{(m)} - z_1^{(m)} D_0^{(m)})$,

und wenn in dieser Gleichung λ durch $\lambda - 1$, $\lambda - 2, \ldots, 2, 1$ ersetzt wird, die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $z_{\lambda+1}'^{(m)}$, $z_{\lambda+1}^{(m)} z_{\lambda}^{m}$, $\ldots$ $z_{\lambda+1}^{(m)} c_{\lambda}^{(m)} \ldots c_3^{(m)} c_2^{(m)}$ multipliziert und zu (20) addiert werden, so folgt

(21) $D_{\lambda+1}^{(m)} = z_2^{(m)} z_3^{(m)} \ldots z_{\lambda+1}^{(m)} \{D_1^{(m)} + (D_1^{(m)} - z_1^{(m)} D_0^{(m)}) s_{\lambda+1}^{(m)}\}$,

wo $s_{\lambda+1}^{(m)}$ durch

$$(22) \qquad s_{\lambda+1}^{(m)} = \sum_{2}^{\lambda+1} {}_{\nu} \zeta_2^{(m)} \zeta_3^{(m)} \ldots \zeta_{\nu}^{(m)}$$

definiert ist.

Setzt man hierein nach Gleichung (18) die Werte der D ein und bildet den Quotienten, indem man sie, einmal durch die A, das andere Mal durch die B ersetzt, so erhält man

$$(23) \qquad \frac{A_{(\lambda+1)\,p+m}}{B_{(\lambda+1)\,p+m}} = \frac{A_{p+m} + (A_{p+m} - z_1^{(m)} A_m) s_{\lambda+1}^{(m)}}{B_{p+m} + (B_{p+m} - z_1^{(m)} B_m) s_{\lambda+1}^{(m)}},$$

und wenn man zur Grenze übergeht

$$(24) \qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{(\lambda+1)\,p+m}}{B_{(\lambda+1)\,p+m}} = \frac{A_{p+m} + (A_{p+m} - z_1^{(m)} A_m) s^{(m)}}{B_{p+m} + (B_{p+m} - z_1^{(m)} B_m) s^{(m)}},$$

so daß die Konvergenz der einzelnen durch den Wert von m charakterisierten Folgen von Näherungsbrüchen jedenfalls dann feststeht, wenn der Nenner der rechten Seite von Null verschieden ausfällt. Dies läßt sich aber immer dadurch erreichen, daß man, wenn nötig, die Größen α_m, β_m und ε noch weiter verkleinert. Durch Verkleinerung der α_m und β_m wird bewirkt, daß B_{p+m} und B_m sich nur wenig von B_{p+m} und $\bar{B}_m$ unterscheiden, da ja beide nur eine endliche Anzahl von Teilzählern und Nennern des Kettenbruches enthalten, während eine Verkleinerung von ε nach (17) den Unterschied von $s^{(m)}$ und $\frac{\zeta}{1-\zeta}$ verringert und gleichzeitig die Differenz zwischen $z_1^{(m)}$ und z vermindert, wie aus der Beziehung (13) und Beachtung der Gleichung (8) hervorgeht. Der Nenner von (24) wird sich daher wenig von dem Ausdruck

$$(25)\quad \overline{B}_{p+m} + (\overline{B}_{p+m} - z\,\overline{B}_m)\,\frac{\zeta}{1-\zeta} = \frac{1}{1-\zeta}\,(\overline{B}_{p+m} - z'\overline{B}_m)$$

unterscheiden. Der zweite Faktor $\overline{B}_{p+m} - z'\overline{B}_m$ kann aber nach § 2 nur verschwinden, wenn $A_{m,\,p+m} = 0$ ist, er wird also hier wegen der Voraussetzung (7) über einer endlichen Schranke bleiben, und für den ersten Faktor gilt

$$\left|\frac{1}{1-\zeta}\right| > \frac{1}{1+\vartheta},$$

so daß der ganze Ausdruck (25) über einer endlichen Schranke bleibt. Da aber der Nenner der rechten Seite von (24) sich von diesem Ausdrucke nur wenig unterscheidet, wenn man die Größen α_m, β_m und ε gehörig einschränkt, so wird man erreichen können, daß

$$(26)\qquad |B_{p+m} + (B_{p+m} - z_1^{(m)}\,B_m)\,s^{(m)}| \geqq k,$$

womit dann die Konvergenz von (24) bewiesen ist.

Da aber $s_\lambda^{(m)}$ gegen $s^{(m)}$ konvergiert, so ergibt sich außerdem aus (21) und (26) für $k' < k$

$$(27)\qquad |B_{(\lambda+1)\,p+m}| \geqq |z_2^{(m)}\,z_3^{(m)}\,\ldots,\,z_{\lambda+1}^{(m)}|\cdot k',$$

sobald λ eine gewisse untere Schranke übersteigt.

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß die p-Grenzwerte (24) für $m = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ tatsächlich übereinstimmen. Dazu betrachte man die Differenz

$$(28)\qquad \left|\frac{A_{(\lambda+1)\,p+m}}{B_{(\lambda+1)\,p+m}} - \frac{A_{(\lambda+1)\,p+m-1}}{B_{(\lambda+1)\,p+m-1}}\right| = \left|\frac{a_1^{(1)}\,a_1^{(2)}\ldots a_1^{(p)}\ldots a_\lambda^{(1)}\,a_\lambda^{(2)}\ldots a_\lambda^{(p)}\,a_{\lambda+1}^{(d)}\ldots a_{\lambda+1}^{(m)}}{B_{(\lambda+1)\,p+m-1}\,B_{(\lambda+1)\,p+m}}\right|$$

und bemerke, daß nach Gleichung (10) und (14)

$$|a_\lambda^{(m+1)}\,a_\lambda^{(m+2)}\ldots a_\lambda^{(p)}\,a_{\lambda+1}^{(1)}\ldots a_{\lambda+1}^{(m)}| = \left|\frac{A_{\lambda\,p+m,\,(\lambda+1)\,p+m}}{A_{(\lambda+1)\,p+m,\,(\lambda+2)\,p+m}}\,P_{\lambda+2}^{(m)}\right|$$

$$= \left|\frac{A_{\lambda\,p+m,\,(\lambda+1)\,p+m}}{A_{(\lambda+1)\,p+m,\,(\lambda+2)\,p+m}}\,z_{\lambda+1}^{(m)}\,z'^{(m)}_{\lambda+2}\right|.$$

Multipliziert man dies mit den entsprechenden Gleichungen, in denen λ durch $\lambda-1,\ \lambda-2,\ldots,2,1$ ersetzt ist, so kommt

$$(29)\quad \left|a_1^{(m+1)}a_1^{(m+2)}\ldots a_1^{(p)}a_2^{(1)}\ldots a_2^{(p)}\ldots a_\lambda^{(1)}\ldots a_\lambda^{(p)}a_{\lambda+1}^{(1)}\ldots a_{\lambda+1}^{(m)}\right| = \left|\frac{A_{m,\,p+m}}{A_{(\lambda+1)\,p+m,\,(\lambda+2)\,p+m}}\right| \cdot \left|z_1^{(m)}z_2^{(m)}\ldots z_{\lambda+1}^{(m)}z_2^{\prime(m)}z_3^{\prime(m)}\ldots z_{\lambda+1}^{\prime(m)}z_{\lambda+2}^{\prime(m)}\right|.$$

Setzt man dies und (27) in (28) ein, so wird für $\lambda > \lambda'$

$$(30)\quad \left|\frac{A_{(\lambda+1)\,p+m}}{B_{(\lambda+1)\,p+m}} - \frac{A_{(\lambda+1)\,p+m-1}}{B_{(\lambda+1)\,p+m-1}}\right| \leqq \left|a_1^{(1)}a_1^{(2)}\ldots a_1^{(m)}\right| \left|\frac{A_{m,\,p+m}}{A_{(\lambda+1)\,p+m,\,(\lambda+2)\,p+m}}\right| \cdot \left|z_1^{(m)}z_{\lambda+2}^{\prime(m)}\right| \cdot \left|\frac{z_2^{\prime(m)}}{z_2^{(m-1)}}\right| \left|\frac{z_3^{\prime(m)}}{z_3^{(m-1)}}\right| \ldots \left|\frac{z_{\lambda+1}^{\prime(m)}}{z_{\lambda+1}^{(m-1)}}\right|.$$

Nun ist aber

$$(31)\quad \left|\frac{z_\nu^{\prime(m)}}{z_\nu^{(m-1)}}\right| \leqq \Theta < 1,$$

wie man durch genau dieselbe Rechnung bestätigt, die im vorigen Paragraphen zu der Formel (20) geführt hat. Die ersten drei Faktoren auf der rechten Seite von (30) bleiben bei wachsendem λ unter einer endlichen Schranke G und somit ergibt sich

$$(32)\quad \left|\frac{A_{(\lambda+1)\,p+m}}{B_{(\lambda+1)\,p+m}} - \frac{A_{(\lambda+1)\,p+m-1}}{B_{(\lambda+1)\,p+m-1}}\right| \leqq G \cdot \Theta^{\lambda-1},$$

also

$$(33)\quad \lim_{\lambda=\infty}\left(\frac{A_{(\lambda+1)\,p+m}}{B_{(\lambda+1)\,p+m}} - \frac{A_{(\lambda+1)\,p+m-1}}{B_{(\lambda+1)\,p+m-1}}\right) = 0,$$

womit die Übereinstimmung der Grenzwerte für zwei aufeinanderfolgende Werte von m, also auch für alle Werte von m bewiesen ist.

Sind die $a_m^{(\nu)}$, $b_m^{(\nu)}$, $a^{(m)}$, $b^{(m)}$ Funktionen irgend welcher Variabeln in einem Bereiche T, während ε, ϑ, α_m, β_m Konstanten sind, so konvergiert jede einzelne der p Folgen von Näherungsbrüchen gleichmäßig gegen ihren Grenzwert und die Differenz zweier aufeinanderfolgender Näherungsbrüche konvergiert gleich-

mäßig gegen Null, so daß der ganze Kettenbruch gleichmäßig konvergiert.

Ist der Kettenbruch insbesondere von der Form $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_1^\infty$, wobei

$$\lim_{\lambda=\infty} a_{\lambda p+m} = a^{(m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots, p),$$

so ist zunächst zu untersuchen, für welche Werte von x

$$S^2 = 4\,\vartheta\,P \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1). \tag{34}$$

S und P sind dabei ganze rationale Funktionen von x, so daß die Werte von x, die der Gleichung (34) genügen, auf einem gewissen Stück einer algebraische Kurve liegen. Trennt man nämlich in (34) Reelles und Imaginäres, eliminiert dann ϑ, so erhält man die Gleichung einer algebraischen Kurve:

$$F(\xi, \eta) = 0, \tag{35}$$

von der aber nur der Teil in Betracht zu ziehen ist, bei dem der Parameter ϑ Werte zwischen 0 und 1 hat. Es bliebe zu untersuchen, ob dieses Stück der algebraischen Kurve die Ebene in zwei getrennte Bereiche zerlegen kann. Jedenfalls folgt, daß in jedem endlichen abgeschlossenen Bereiche, der den Nullpunkt, aber keinen Punkt des Stückes der Kurve (35) enthält und für den die Bedingung (7) erfüllt ist, der Kettenbruch eine bis auf Pole reguläre analytische Funktion darstellt, genau durch dieselben Schlüsse, die beim eingliedrig limitär-periodischen Kettenbruch zu diesem Resultate führen Pringsheim 4).

Lebenslauf.

Ich, Max Freiherr von Pidoll zu Quintenbach, katholischer Konfession, wurde geboren am 20. April 1887 zu Luxemburg im Großherzogtum als Sohn des Malers Carl Freiherr von Pidoll und seiner Ehefrau Margarethe, geborenen von Scherff. Ich erhielt meine Mittelschulbildung am städtischen Lessinggymnasium zu Frankfurt a. M. und am Königlichen Joachimsthalschen Gymnasium zu Berlin, das ich Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife verließ, war dann während zweier Jahre Studierender der Ingenieurschule des eidgenössischen Polytechnikums zu Zürich und widmete mich vom Herbste 1907 an dem Studium der Mathematik an der Universität zu München. Hier besuchte ich die Vorlesungen und Übungen der Herren Brunn, Doehlemann, Geiger, Graetz, von Groth, Hartogs, Lindemann, Perron, Pfänder, Pringsheim, Röntgen, Sommerfeld, Voß, denen ich für die mir zu Teil gewordene Belehrung und Förderung aufrichtig dankbar bleibe.